

Algebra liniowa 1R, Lista 11

1. Uzasadnij: $\ker(F \circ G) \supseteq \ker(G)$, $\operatorname{Im}(F \circ G) \subseteq \operatorname{Im}(F)$. (F, G to przekształcenia liniowe)
2. Znajdź nieparametryczne równania opisujące obrazy i jądra przekształceń $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ o macierzach:
 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}; (5 \quad -1 \quad 2); \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$
3. Znajdź postać ogólną rozwiązania układu $AX = Y$ (a) dla: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$;
 $Y = (0, 0, 0)^\top, (1, 1, 1)^\top, (1, -2, 3)^\top, (-6, -3, 3)^\top, (2, 4, 2)^\top,$
 $(-1, 3, 0)^\top, (1, 0, 3)^\top, (1, 3, 0)^\top, (4, 12, -8)^\top$; (b) dla $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 90 \\ -30 \end{pmatrix}$.
4. Udowodnij, że jeśli układ $AX = Y$ ma dwa rozwiązania, to ma ich nieskończenie wiele.
5. Znajdź M^{-1} . Wypróbuj wszelkie znane Ci sposoby. $M =$
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$

6. Znajdź macierz (a) rzutu (prostokątnego) na płaszczyznę $3x + 2y - z = 0$; (b) rzutu (prostokątnego) na prostą $X = t(1, 0, -7)^\top$; (c) symetrii względem prostej $X = t(-1, 2, 1)^\top$.
7. Napisz macierze obrotów o kąt θ wokół osi OX i wokół osi OY . Dla $\theta = \pi/2$ oblicz złożenia tych obrotów w obu możliwych kolejnościach.
8. Znajdź macierz obrotu o $2\pi/3$ wokół prostej $x = y = z$. (Są dwa takie obroty; wybierz jeden z nich.)
9. Niech $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ i $G : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będą odwzorowaniami liniowymi.
 a) Uzasadnij, że F nie jest na.
 b) Uzasadnij, że G nie jest 1-1.
 c) Uzasadnij, że $F \circ G$ nie jest odwracalne.
10. Podaj przykłady przekształceń liniowych $F, G : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, takich że (a) $\ker(F) \subset \operatorname{Im}(F)$ (b) $\operatorname{Im}(G) \subset \ker(G)$. Postaraj się znaleźć zarówno nietrywialne, jak i trywialne przykłady.
11. Podaj przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, którego obraz jest płaszczyzną, jądro jest prostą, zaś kąt między jądrem a obrazem wynosi 60° . (Napisz macierz takiego przekształcenia.)
12. O liniowych przekształceniach $F, G, H : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ wiadomo, że: $F \circ G \circ H$ jest na, $\det(G) = -4$, $H = F \circ G \circ F$. Udowodnij, że F jest różnowartościowe.
13. Uzasadnij, że jeśli $N^3 = 0$, to $(I + N)^{-1} = I - N + N^2$. Użyj tego wzoru by policzyć $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.
14. Czy prawdziwe są (dla odwracalnych macierzy 3×3) wzory: $(MN)^{-1} = M^{-1}N^{-1}$, $(M + N)^{-1} = M^{-1} + N^{-1}$, $\det(aM) = a \det(M)$, $\det(M + N) = \det(M) + \det(N)$?
15. Uzasadnij, że dla dowolnego wektora $A \in \mathbf{R}^3$ przekształcenie M_A zadane wzorem $M_A(X) = A \times X$ jest liniowe. Wyraź jego macierz przez współrzędne wektora A .

16. W oznaczeniach poprzedniego zadania, znajdź macierz przekształcenia $M_A \circ M_B - M_B \circ M_A$ (wyraź jej wyrazy przez współrzędne A, B). Przyjrzyj się tej macierzy uważnie.
17. Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} 121 & -248 \\ -321 & 625 \\ 144 & -91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 321 & 231 & 123 \\ -619 & 26 & -17 \end{pmatrix}$.
18. Niech $M, N \in M_{3 \times 3}$, przy czym $\det(MN) \neq 0$. Uzasadnij, że macierze M i N są odwracalne.
19. Uzasadnij, że istnieje $\epsilon > 0$, taki że jeśli macierz N spełnia warunek: $(\forall i, j \in \{1, 2, 3\})(|N_{ij}| < \epsilon)$, to macierz $I + N$ jest odwracalna. Czy potrafisz podać jakąś konkretną wartość ϵ spełniającą powyższą tezę (im większa tym lepsza)?
20. Niech $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie liniowe. Uzasadnij, że jeśli $\ker(F)$ jest jednopunktowe/prostą/płaszczyzną/ $\mathbf{R}^3$, to $\operatorname{Im}(F)$ jest $\mathbf{R}^3$ /płaszczyzną/prostą/jednopunktowe, odpowiednio.
21. Niech M będzie macierzą 2×2 o wyrazach całkowitych. Załóżmy, że $M^n = I$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n . Udowodnij, że $M^{12} = I$.