

Algebra liniowa 1R, lista 14

Uwaga: PODWÓJNA PROMOCJA! Każde zadanie na tej liście ma podwojoną wartość. Ponadto za zadanie domowe z tej listy można dostać aż 2 punkty!

1. Uzasadnij, że jeśli macierz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$ ma rzeczywistą wartość własną, to A diagonalizuje się (nad $\mathbf{C}$).
2. Podaj przykład paraboloidy hiperbolicznej i leżącej na niej prostej.

3. Sprowadź poniższe powierzchnie do postaci kanonicznej: napisz macierz odpowiedniej formy kwadratowej; znajdź wartości własne i bazę ortonormalną wektorów własnych; napisz postać kanoniczną równania i macierze P i P^{-1} wiążące współrzędne x, y, z ze współrzędnymi x', y', z' w których postać równania jest kanoniczna. Zidentyfikuj powierzchnię, naszkicuj ją na tle układu współrzędnych $x'y'z'$. Odczytaj z postaci kanonicznej równania jej własności geometryczne (długości półosi, symetrię obrotową lub jej brak, odległość między powłokami, kąty półrozwarcia stożka asymptotycznego itp.). Opisz też położenie powierzchni względem układu xyz (podając kierunki półosi, osi symetrii obrotowej lub osi stożka asymptotycznego itp.).

(a) $x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz = 3$,

(e) $11x^2 + 4xy - 16xz + 2y^2 + 20yz + 5z^2 = 9$,

(f) $-2xz + y^2 = 1$,

(g) $5x^2 - 2xy - 2xz + 5y^2 - 2yz + 5z^2 = 3$,
4. Polecenie jak w poprzednim zadaniu, ale dla powierzchni:

(c) $x^2 - 4y^2 - 4yz - z^2 = 0$,

(d) $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 0$,

(h) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2zy = 0$,

(j) $2x^2 - 8xy + 8y^2 + 12xz - 24yz + 18z^2 = 1$.
5. Dla poniższych wielomianów znajdź liczbę pierwiastków dodatnich i liczbę pierwiastków ujemnych (i stwierdź czy 0 jest pierwiastkiem). Określ też krotności pierwiastków. (Wsk. Zróżniczkuj wielomian; znajdź jego ekstrema, przedziały monotoniczności, wartości wielomianu na końcach tych przedziałów i wartość w 0. Często zamiast tej procedury wystarczy policzyć wartości w kilku sprytnie zgadniętych punktach.) (a) $-x^3 + 7x^2 + 2x - 1$, (b) $x^3 - 4x^2 + 17x - 1$, (c) $x^3 + 3x$, (d) $x^3 + x^2 - 8x - 12$, (e) $x^3 + 2x^2 - x + 2$, (f) $x^3 + x^2 + x + 3$.
6. Zidentyfikuj powierzchnię (np. jako elipsoidę, parę płaszczyzn itp.), nie znajdując dokładnych wartości współczynników postaci kanonicznej a jedynie określając ich znaki.

(a) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4xz + 3z^2 = 1$,

(b) $x^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 3z^2 = 0$,

(c) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2xz + 2yz + 4z^2 = 1$,

(d) $-2x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 6yx - 2z^2 = 1$.
7. Załóżmy, że macierze $A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$ mają obie wielomian charakterystyczny $(3 - x)(5 - x)^2$, ale żadna z nich nie diagonalizuje się. Wykaż, że istnieje odwracalna macierz $P \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, taka że $A = PBP^{-1}$.
8. Sprowadź do postaci Jordana:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

-
9. Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbf{R}^2$, zaś $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ przekształceniem liniowym. (a) Sprawdź, że $Q \circ F$ jest formą kwadratową na $\mathbf{R}^3$. (b) Pokaż, że 0 jest jednym ze współczynników w postaci kanonicznej formy $Q \circ F$.
 10. Dla kilku z poniższych powierzchni: znajdź postać kanoniczną równania; nazwij powierzchnię; znajdź prostokątny (niekoniecznie liniowy) układ współrzędnych X' , w którym równanie powierzchni jest kanoniczne, tzn. wyznacz macierz izometrii P i wektor T , takie że $X' = P^T X + T$; naszkicuj powierzchnię w układzie X' ; określ położenie powierzchni na tle standardowego układu (zdaniem typu: "osią symetrii obrotowej rozpatrywanej hiperboloidy jest prosta $X = (1, 2, 3)^T + t(3, 4, 5)^T$ ")

(a) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$,

(b) $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$,

(c) $z^2 = 2xy$,

(d) $2xy + 2yz + 2zx + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$,

(e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$,

(f) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$,

(g) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$.
 11. Pokaż na przykładach, że przekrój stożka $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ i płaszczyzny może być elipsą, hiperbolą, parabola.

12. Oblicz: $\exp \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp [t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}]$, $\sin \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$.
13. Wyprowadź wzór na $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.
14. Udowodnij, że $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ (dla $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{C})$).