

Algebra liniowa 1R, Lista 5

“Symetria”, o ile nie jest powiedziane inaczej, oznacza symetrię osiową względem prostej przechodzącej przez 0.

1. Uzasadnij, że jeśli λ jest rzeczywistą wartością własną pewnej izometrii liniowej, to $\lambda = \pm 1$.
 2. Obrazem wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ przez izometrię liniową F jest wektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Wyjaśnij, dlaczego powyższe zdanie jest fałszywe.
 3. Czy istnieje liniowa izometria F , taka że $F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$?
 4. Liniowa izometria F przekształca wektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ na wektor $\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ i zmienia orientację. Znajdź $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 5. Sprawdź, czy macierz jest macierzą izometrii. Jeśli tak, stwierdź czy jest to macierz obrotu czy symetrii. O jaki kąt / względem której prostej? (Wsk: jeśli A jest macierzą symetrii, to równanie $AX = X$ określa oś tej symetrii.) (a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
-
6. Uzupełnij (na wszystkie możliwe sposoby) do macierzy izometrii: $\begin{pmatrix} * & 3 \\ * & * \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} * & * \\ * & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} * & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ * & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
Które z otrzymanych izometrii zachowują orientację?
 7. Ile jest liniowych izometrii $\mathbf{R}^2$ o śladzie $\sqrt{3}$? Znajdź je wszystkie; wypisz ich macierze.
 8. Złożenie $S_\ell \circ S_k$ jest obrotem ($\ell = \{t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R}\}$; $k = \{t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R}\}$). Znajdź jego macierz i stwierdź, o jaki kąt jest to obrót.
 9. Przedstaw w postaci $T_U \circ F$ (a) symetrię względem prostej $x = 1$; (b) obrót (w kierunku przeciwnego do wskazówek zegara) o kąt $\pi/2$ wokół punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 10. Czy zachowuje orientację przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{2003}$?
 11. Uzasadnij, że złożenie piętnastu symetrii nie jest obrotem.
 12. Niech F będzie izometrią liniową. Uzasadnij, że F jest odwracalne i F^{-1} też jest izometrią.
 13. Znajdź macierz symetrii względem prostej $y = ax$.
 14. Znajdź wszystkie izometrie liniowe przeprowadzające oś OX w siebie.
 15. Wyrachuj na macierzach: (a) że $R_\theta \circ S_\ell$ jest symetrią. (b) czym jest $S_\ell \circ R_\theta$. (c) czym jest $S_\ell \circ S_k$.
 16. Każda izometria płaszczyzny jest postaci $T_U \circ A$, gdzie A jest izometrią liniową. Zapisz w tej postaci izometrię $(T_X \circ B) \circ (T_Y \circ C)$ (gdzie B, C są izometriami liniowymi).
 17. Załóżmy, że A, B, C, D są liniowymi przekształceniami płaszczyzny, przy czym wiadomo, że A i C są obrotami, $\det(D) < 0$, $\det(A \circ B \circ C \circ D) > 0$ zaś B jest izometrią. Znajdź wartości własne B .
-
18. Napisz macierz izometrii F , takiej że kąt między $F\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ jest większy od 22° , ale mniejszy od 23° .
 19. Znajdź wszystkie izometrie liniowe (tzn. ich macierze) takie że obrazem prostej $3x - 2y = 0$ jest prosta $2x + 5y = 0$.
 20. Wykaż, że każda izometria płaszczyzny jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych (względem osi niekoniecznie przechodzących przez 0).
 21. Dowiedz się, co to jest symetria z poślizgiem i wykaż, że każda izometria płaszczyzny jest obrotem lub symetrią z poślizgiem.
 22. Udowodnij, że dowolne dwa obroty F, G płaszczyzny (niekoniecznie wokół zera, niekoniecznie wokół tego samego punktu) spełniają równanie

$$F \circ G \circ F^{-1} \circ G^{-1} \circ F \circ G^{-1} \circ F^{-1} \circ G \circ G \circ F \circ G^{-1} \circ F^{-1} \circ G^{-1} \circ F \circ G \circ F^{-1} = Id.$$

Czy potrafisz napisać nietrywialne równanie spełniane przez dwie dowolne izometrie płaszczyzny?