

Algebra liniowa 1R, Lista 7

1. Przedstaw w postaci $a + bi$: $\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{1-i}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1+i}{2-i}$, $\frac{1}{i^5}$, $\frac{1}{(-2+i)(1-3i)}$, $\frac{(4-5i)^2}{(2-3i)^2}$.
2. Zapisz w postaci trygonometrycznej: -1 , $1 + i$, $-1 - \sqrt{3}i$, $7 - 7i$, $-5 + 5\sqrt{3}i$.
3. Oblicz $(2 + 3i)\overline{(7 - i)}$.
4. Rozwiąż układy równań (a) $\begin{cases} z + iw = 1 \\ iz + w = 1 + i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (1 + i)z - iw = 3 + i \\ (2 + i)z + (2 - i)w = 2i \end{cases}$

5. Rozwiąż (w $\mathbf{C}$):
 (a) $z^2 - z + 1 = 0$, (b) $z^2 + 3z + 3 - i = 0$, (c) $z^2 + (2i - 1)z + 1 + 5i = 0$, (d) $z^2 + iz = 2$, (e) $2z + \bar{z} = 6 - 5i$.
6. Udowodnij: (a) $|-z| = |z|$, (b) $|z/w| = |z|/|w|$, (c) $|z/z| = 1$, (d) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$, (e) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$,
 (f) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}\bar{\bar{w}}$, (g) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, (h) $|z + w| \leq |z| + |w|$.
7. Średnia arytmetyczna pewnych 150 liczb zespolonych wynosi 1. Udowodnij, że przynajmniej jedna z tych liczb ma moduł nie mniejszy niż 1.
8. Oblicz podane iloczyny posługując się postacią trygonometryczną:
 (a) $(1 + i)(\sqrt{3} + i)$, (b) $(4 + 4i)(-3 + 3i)$, (c) $(10 - 10\sqrt{3}i)(2 - 2i)$, (d) $(\sqrt{3} + i)^{30}$.
9. Oblicz (a) $(1 + i)^{1000}$; (b) $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^{24}$; (c) $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^{129}$.
10. Wyraż $\sin(5\phi)$ przez $\sin \phi$ i $\cos \phi$. [Wsk. Użyj wzoru de Moivre'a.]
11. Wyprowadź wzór na postać trygonometryczną ilorazu dwóch liczb zespolonych (o zadanych postaciach trygonometrycznych). Użyj go do obliczenia ilorazów:
 (a) $(2 + 2i)/(1 - i)$, (b) $(1 - \sqrt{3}i)/(\sqrt{3} + i)$, (c) $3i/(1 + i)$.
12. Narysuj zbiór $\{\frac{1+it}{1-it} : t \in \mathbf{R}\}$.
13. Posługując się postacią trygonometryczną oblicz i narysuj podane pierwiastki:
 (a) 3 stopnia z $8i$; (b) 6 stopnia z 27 ; (c) 4 stopnia z $-(1/2) - (\sqrt{3}/2)i$; (d) 8 stopnia z 1 .
14. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiór zadany równaniem / nierównością:
 (a) $\frac{|z+1|}{|z-i|} = 1$; (b) $\frac{|z+1|}{|z-i|} = 2$; (c) $|\arg z| < \pi/3$; (d) $3 < |z - 2 + i| < 5$; (e) $-1 < \operatorname{Re}(iz) < 0$.
15. Udowodnij, że $|\frac{z-i}{z+i}| < 1 \iff \operatorname{Im}(z) > 0$. Zinterpretuj geometrycznie.

16. Liczbę zespoloną nazywamy *pierwiastkiem pierwotnym stopnia n z 1*, jeśli każdy pierwiastek stopnia n z 1 jest jej potęgą. Które spośród pierwiastków z 1 stopnia: (a) 3; (b) 12; (c) 16; są pierwiastkami pierwotnymi tegoż stopnia z 1?
17. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków stopnia n z 1.
18. Opisz geometrycznie przekształcenie płaszczyzny $z \mapsto iz$.
19. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwóm wierzchołkom odpowiadają liczby z oraz w .
20. Zinterpretuj geometrycznie wyrażenie $\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right)$. (Zakładamy $z_1 \neq z_3 \neq z_2$.)
21. Oszacuj, jak zachowuje się długość wektora $\binom{3}{-2} \binom{5}{7}^n \binom{0}{1}$ gdy $n \rightarrow +\infty$.
22. Niech $a_{n+1} = 3a_n - 4a_{n-1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = -4$. Znajdź przybliżoną wartość a_{100} (ile cyfr ma ta liczba? jaka jest pierwsza cyfra? to może wymagać zajrzenia do tablic).