

Algebra liniowa 1R, Lista 8

1. Zapisz w postaci wykładniczej: $-1, 1 + i, -1 - \sqrt{3}i, 7 - 7i, -5 + 5\sqrt{3}i, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.
2. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$. Wykorzystaj fakt, że liczba a jest pierwiastkiem P .
 - (a) $P(z) = z^3 - 2z^2 - 5z + 6, a = -2$;
 - (b) $P(z) = z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26, a = -2 + 3i$;
 - (c) $P(z) = z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2, a = i$;
 - (d) $P(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 10z^2 + 25z, a = 1 - 2i$.
3. Napisz wielomian o współczynnikach rzeczywistych, taki że liczby $1, 3, 2 + i$ są jego pierwiastkami.
4. Sprowadź do postaci Jordana (w razie potrzeby nad $\mathbf{C}$): $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Na bokach czworokąta wypukłego zbudowano (na zewnątrz tego czworokąta) kwadraty o środkach A, B, C, D . Udowodnij, że odcinki AC i BD są prostopadłe i mają tę samą długość.
6. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$.
 - (a) $P(z) = z^6 + 27$;
 - (b) $P(z) = z^4 + 4z^3 + 4z^2 - 4z - 5$;
 - (c) $P(z) = z^4 + 4$.
7. Niech $M \in M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$. Uzasadnij używając twierdzenia Jordana, że jeśli $M^{100} = 0$, to $M^2 = 0$.
8. Sprowadź do postaci Jordana nad $\mathbf{C}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. Sprowadź macierze z poprzedniego zadania do rzeczywistej postaci Jordana.
10. Oblicz $\begin{pmatrix} 11 \\ -13 \end{pmatrix}^{50}$.
11. Oblicz $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}$. Pomyśl jak zminimalizować ilość potrzebnych rachunków.
12. Oblicz $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -7 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^{1232} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pomyśl jak zminimalizować ilość potrzebnych rachunków.
13. Znajdź możliwie dużo $X \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$ spełniających równanie $X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.
14. Rozwiąż równania: (a) $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$; (b) $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$.
15. Uzasadnij wzór $x^{2n+1} - 1 = (x - 1)\prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right)$. Znajdź analogiczny wzór dla $x^{2n} - 1$.

16. Uzasadnij (dla $z \neq 1$) wzór $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$. Dla $z = e^{ix}$ część rzeczywista tego wzoru da wzór na sumę $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$, a część urojona da wzór na $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$. Napisz te wzory; spróbuj przekształcić je do rzeczywistej postaci (tak, by w ostatecznej odpowiedzi były funkcje trygonometryczne, a nie eksponensy liczb urojonych).
17. Oblicz $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$. Wywnioskuj następujący wzór Strassnitzky'ego:

$$\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{8}.$$

18. Udowodnij, że $\prod_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} = \pm 2^{-n}$; oraz że $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$. Znajdź analogiczne wzory dla $\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$ oraz dla $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.
19. Wyznacz wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość $W(x^2)W(x^3) = (W(x))^5$.
20. Przeczytaj prolog książki W. Rudina *Analiza rzeczywista i zespolona*.