

Przechylenie linie, cd. (17.X.2006)

1

sprawdzić kolejność
materiału dot. materiału
materiału na kółkach
(dla pewności a, b, c, d, e, f
zobacz, że od F)

Def $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linie. gdy $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

Fakt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

NWSR 1) F linie

2) F abdytune i jednolite

3) $F(\alpha x + \beta y) = \dots$

1 $\Rightarrow$ 2 rachunki

2 $\Rightarrow$ 3 v

3 $\Rightarrow$ 1 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

~~nie ma potrzeby~~

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Def $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ macierz macierzy przekł.

Jeśli $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ to $m(F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ macierz macierzy przekł. F.

Uwaga Odpowiedzi $F \leftrightarrow m(F)$ jest wzajemnie jednoznaczne.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ~~macierz~~

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kolumny

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wiersze

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Przydatny fakt.

Kolumnami macierzy p. liniowego F są $F(E_1)$, $F(E_2)$

$m(F) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$
 $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \uparrow \quad \uparrow F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Dlaczego?

Przykład 1) wekt. $\perp$ na $\ell = \ell\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$P_{\ell}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\|^2} = \begin{pmatrix} \frac{x+2y}{5} \\ \frac{2x+4y}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix}$$

$$m(P_{\ell}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

~~Uwaga! Nie należy mylić macierzy przekł. z macierzą odwzorowania. Macierz przekł. to macierz odwzorowania z wektorem kolumnowym.~~

P. Niniwe (17. X. 2006)

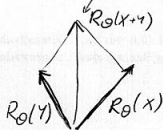
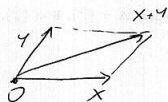
2) Obrot o kąt θ wokół $\vec{O}$ (R_θ)

- a) czy jest ~~liniowa~~ liniowa?
• addytywność

Typowy błąd:
Wzrosty wzoru p.,
które nie jest liniowe!

Aby go uniknąć sprawdzamy, czy R_θ liniowa

$$R_\theta(x) + R_\theta(y) \stackrel{?}{=} R_\theta(x+y)$$

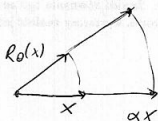


→ Właściwość równoległości.

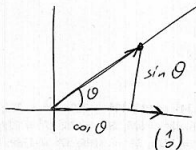
(„równoległość po obrocie jest nadal równoległością”).

- jednorodność

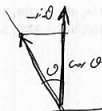
$$R_\theta(\alpha x) \stackrel{?}{=} \alpha R_\theta(x)$$



b) macierz R_θ



$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$



$$R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$m(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

czyli:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta x - \sin \theta y \\ \sin \theta x + \cos \theta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(3)

Nakładanie macierzy na wektor

notacja macierzysta
została wymyślona po to,
aby maksymalnie
utrudnić życie

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

sechenna sugestia

$$\begin{pmatrix} \textcircled{x} \\ \boxed{y} \end{pmatrix}$$

proszę nie przynosić się
na jakobyś Panistwo
mimo takich rzeczy.

$$= \begin{pmatrix} \textcircled{a} & \boxed{b} \\ \textcircled{c} & \boxed{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Dla o.i.b. wygodniejszych się przed siebie:

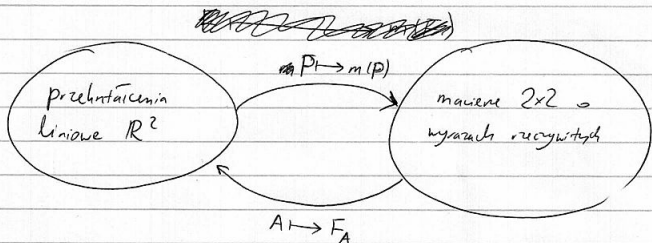
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} x_j \\ \sum_j a_{2j} x_j \end{pmatrix}$$

czyli

$$(A \cdot X)_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad \text{pishne, prawda?}$$

Przypomnienie: ~~stare~~

odpowiedniość pomiędzy przekształceniami liniowymi $\mathbb{R}^2$ a macierzami 2×2 o wyrazach rzeczywistych jest wzajemnie jednoznaczna.



F_A to składowanie zadane macierzą A ,
tzn.

$$F_A(X) = A \cdot X$$

Obrat/průběh přímky při p. lineárně.

a) Obrat přímky l u přecházcem lineárně F
 přímka $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $m(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F(l) = \{ \dots - \}$$

Zagadka: Cij zaručí vylidne
 přímka?

Zagadka: dleaso mlti
 nejvzodici mlti

~~param?~~

postoi parametricky?

b) průběh přímky $l: x+2y=1$
 (to samo F).

$$F^{-1}(l) = \{ u \in \mathbb{R}^2 : F(u) \in l \} =$$

Cij zaručí vylidne přímka?

$$\begin{aligned} \text{~~průběh přímky } l \text{ u přecházcem lineárně } F \text{}~~ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+y \end{pmatrix} \in l \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \overbrace{(x-y)}^{x'} + 2 \overbrace{(3x+y)}^{y'} = 1 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 7x+y=1 \right\}. \end{aligned}$$

17X 2006

18

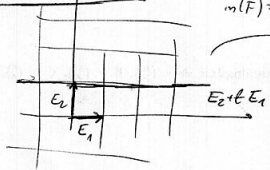
Nachładanie m. na wektor

Drugi macierz na wektor

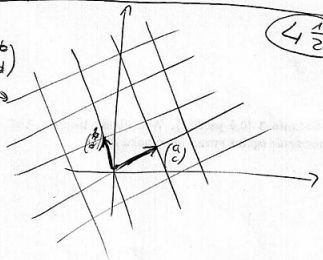
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

TAKIE -
wzrost tylko
w brzośnie

Po karte 4!



$$m(F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

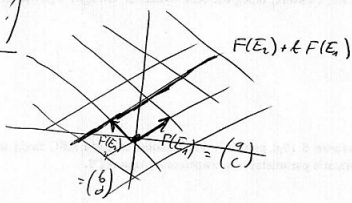


4 1/2

Co jest obrotom siatki

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \right\}?$$

(Luzi M)



Uwaga: jeśli $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nie jest odwracalne,
obrotu będzie wyglądać inaczej!

Czy już interesujące jest, co przekształcenia
liniowe mogą zrobić z obracaniem?

Złożenie przekształceń

17X

(5)

$$F \circ G(x) = F(G(x))$$

$$\begin{aligned} T_u \circ T_w(x) &= T_u(T_w(x)) = \\ &= T_u(x+w) = x+u+w = \\ &= T_{u+w}(x) \end{aligned}$$

$$T_u \circ T_w = T_{u+w}$$

$$T_u \circ T_v(x) = ?$$

transpozycja



Do tego przykładu
wróćmy!

$$S_c \circ S_k(x) = S_c(\underbrace{S_k(x)}_z) = y$$

$$S_k \circ S_c(x) = S_k(\underbrace{S_c(x)}_x) = z$$

nie jest przemienne!

$$S_c \circ S_k \neq S_k \circ S_c!$$

T_u. Złożenie p. lin. jest lin.

D. czy addytywne? → pokazać

czy jedynkowe? (skip!)

Jak policzyć $m(F \circ G)$ znając $m(F)$ i $m(G)$?

$$m(F \circ G) = (F \circ G(e_1), F \circ G(e_2)) = (F(G(e_1)), F(G(e_2)))$$

$$= (m(F) \begin{pmatrix} p. \text{ kolumna} \\ m(G) \end{pmatrix}, m(F) \begin{pmatrix} d. \text{ kolumna} \\ m(G) \end{pmatrix}) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

Mnożenie
macierzy

definicja mnożenia
macierzy

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$$

$$m(F \circ G) = m(F) \cdot m(G)$$

TAJNE.

5¹/₂

$$m(F \circ G) = (F \circ G(E_1), F \circ G(E_2)) =$$

$$= \left(m(F) \begin{pmatrix} \text{pierwsza} \\ \text{kolumna} \\ m(G) \end{pmatrix}, m(F) \begin{pmatrix} \text{druga} \\ \text{kolumna} \\ m(G) \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} =$$

$$=: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$



definiujemy
mnożenie
macierzy tak,
aby było
błoto
proste

Zatem mnożenie macierzy definiujemy tak, aby

$$m(F \circ G) = m(F) \cdot m(G)$$



mnożenie
macierzy

6.1

Def. Matrica ~~A~~ jest odwracalna (invertowalna) jeśli $\exists B$ takie, że

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B nazywamy macierzą odwrotną do A, $B = A^{-1}$

↑
macierz identyfikacyjna
m(I), oznaczona jako I

Fakt. Jeśli F jest przekształceniem odwracalnym, to F^{-1} jest jedyne. Analogicznie dla macierzy.

Dowód. Jeśli G_1, G_2 to odwrócenia odwrotne do F, to

$$G_1 \circ F = F \circ G_1 = Id$$

$$G_2 \circ F = F \circ G_2 = Id$$

$$G_1 = G_1 \circ Id = G_1 \circ (F \circ G_2) = (G_1 \circ F) \circ G_2 = Id \circ G_2 = G_2$$

$$\text{czyli } G_1 = G_2$$

□

na razie nie dowiódł nigdzie
» nie poprawia

(6¹/₃)

Ogólna uwaga:

Fakt $F: X \rightarrow X$ jest odwracalne



F jest różnowartościowa oraz

F jest „na”. (czyli: $\forall y \in X$ istnieje dokładnie jeden $x \in X$ taki, że $F(x) = y$)

X - dowolny zbiór.
w naszym przypadku
 $X = \mathbb{R}^2$

Dowód ($\Downarrow$)

F odwracalne, zatem $\exists G$ takie, że
 $F \circ G = G \circ F = Id$

F jest „na”



~~$\forall y \in X$~~

$\forall y$ istnieje co najmniej

jeden $x \in X$,
taki, że
 $F(x) = y$.

Jeśli $F(x_1) = F(x_2)$, wówczas

$$x_1 = \underbrace{(G \circ F)}_{Id}(x_1) = G(F(x_1)) = G(F(x_2)) = \underbrace{(G \circ F)}_{Id}(x_2) = x_2$$

$x_1 = x_2$ zatem pokazaliśmy, że

F jest różnowartościowa

Dla dowolnego $y \in X$

$$y = F \circ G(y) = F(G(y))$$

czyli y jest obrazem $G(y)$,

coś F jest „na”.

F jest różno-
wartościowa



taki x jest
najmniej
jeden!

□

Dowód ($\Uparrow$)

Dla dowolnego $y \in X$ istnieje takie $x \in X$, że
 $F(x) = y$ (bo F jest „na”). Takie x jest jedyne
(bo F jest różnowartościowa).

Zdefiniujmy $G(y) =$ takie jedyne x , że $F(x) = y$

Zatem $F(G(y)) = y$ czyli $F \circ G = Id$.

Ponadto $G(F(x)) = x$, bo $F(x) = F(x)$.

czyli

$$G \circ F = Id.$$

□.

Fakt. Jeśli f lin F jest odwracalna, to F^{-1} jest też lin.

$$\bullet \quad F^{-1}(x+y) = F^{-1}\left(\underbrace{F(F^{-1}(x))}_x + \underbrace{F(F^{-1}(y))}_y\right) \stackrel{\text{addyt.}}{=} \\ = \underbrace{F^{-1}}_{\text{id}} \left(F(F^{-1}(x) + F^{-1}(y)) \right) = F^{-1}(x) + F^{-1}(y)$$

$\bullet$ + jednoś. (fakt.).

Str. Jeśli F odwracalna, to $m(F)$ jest odwracalna

$$m(F^{-1}) = m(F)^{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} D. \quad I &= m(F \circ F^{-1}) = m(F) \cdot m(F^{-1}) \\ &= m(F^{-1} \circ F) = m(F^{-1}) \cdot m(F) \end{aligned} \right\} \Rightarrow m(F^{-1}) = m(F)^{-1}$$

na str. 6

macierz A odpowiada przekształceniu F

$$F = F_A, \quad F_A(x) = A \cdot x$$

macierz A

przekształcenie F

$$A = m(F)$$

~~F_A jest odwracalne~~

Polemizacja

F_A jest odwracalne $\Rightarrow A = m(F)$ jest odwracalna

$$F = F_A$$

$\Leftarrow$

$$F_A^{-1} \circ F_A = F_A \circ F_A^{-1} = F_A A^{-1} = F_A A^{-1} = I$$

Stw. Jeśli A jest macierzą odwzorowania, to F_A jest odwzoraniem odwzorującym:

$$(F_A)^{-1} = F_{A^{-1}}$$

Dowód. (skip!)

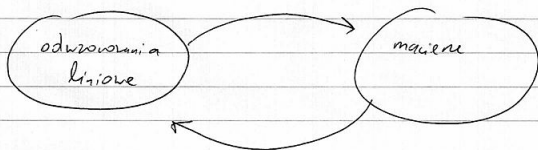
$$m(F_A \circ F_{A^{-1}}) = \underbrace{m(F_A)}_A \cdot \underbrace{m(A^{-1})}_{A^{-1}} = I$$

$$\text{czyli } F_A \circ F_{A^{-1}} = Id$$

$$m(F_{A^{-1}} \circ F_A) = \dots$$

$$\text{czyli } F_{A^{-1}} \circ F_A = Id.$$

Idea:



stwierdzenie
prekursora



małomiasteczka
małomiasteczka

odwzorowanie

prekursora odwzorowania



macierz odwzorowania

Jaki kłopot może odwrócić?

F_A odwracalna $\Leftrightarrow \forall Y \exists! X$
(A odwracalna)

$$FA(X) = Y, \\ AX = Y$$

Argumentacja

→ „istnieje dokładnie jeden”!

$\Leftrightarrow \forall Y$ układ $AX = Y$
ma 1 rozwiązanie.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$$

Wzrostek:

Jaki $ad-bc \neq 0$ to takie
rowiązanie jest jedno!

$$ad-bc \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{d y_1 - b y_2}{ad - bc}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a y_2 - c y_1}{ad - bc}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad X = A^{-1} Y$$

$$A^{-1} = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Wniosek* Jeśli $\det A \neq 0$, wówczas A jest

odwracalna. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

zapisz ten wzór!

$$\} \text{def} \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Jeśli F - p. linowa

$$\det F = \det(m(F))$$

Cwiczenie

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Wniosek**

Jeśli A odwracalna, to $\det A \neq 0$

Dowód. A odwracalna $\Leftrightarrow \exists B \quad AB = BA = I$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

"

$$\det(I) =$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det A \cdot \det B = 1$$

$$\det A \neq 0$$

Korolaryj z Wniosek*: Wniosek** A odwracalna $\Leftrightarrow \det A \neq 0$