Algebra liniowa 1R, Lista 10

1. Zauważ, że jeśli pewne dwa spośród wektorów $X_1, \ldots, X_l$ są równe, to $X_1, \ldots, X_l$ są lz.
2. Sprawdź na możliwie wiele różnych sposobów czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne: (a) $(1,1,0)^\top$, $(0,1,1)^\top$, $(1,0,1)^\top$; (b) $(1,0,1)^\top$, $(0,1,0)^\top$; (c) $(1,2,-3)^\top$, $(-1,-1,2)^\top$, $(3,-2,-1)^\top$.
3. Udowodnij wszelkie sformułowane ale nieudowodnione na wykładzie rachunkowe własności wyznacznika.
4. Wylicz wzór $\det(M) = \det(M^\top)$ (dla macierzy 3×3).
5. Oblicz wyznaczniki:
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ b & x & -1 \\ c & 0 & x \end{vmatrix}$.

---

6. Niech $k < l$. Uzasadnij, że (a) jeśli $X_1, \ldots, X_l$ są lnz, to $X_1, \ldots, X_k$ są lnz; (b) jeśli $X_1, \ldots, X_k$ są lz, to $X_1, \ldots, X_l$ są lz.
7. Udowodnij, że dowolne 4 wektory w $\mathbf{R}^3$ są lz.
8. Które z następujących warunków są równoważne liniowej niezależności wektorów $X_1, X_2, X_3 \in \mathbf{R}^3$? Podaj dowód równoważności lub kontrprzykład.
   a) żadne dwa spośród X_1, X_2, X_3 nie są współliniowe.
   b) X_1 nie jest kombinacją liniową X_2, X_3; X_2 nie jest kombinacją liniową X_1, X_3; ponadto $X_3 \neq 0$.
9. Udowodnij, że jeśli $X \perp Y \perp Z \perp X$ oraz $X, Y, Z \neq 0$, to X, Y, Z są lnz.
10. Przedstaw pierwszy z podanych wektorów w postaci kombinacji liniowej pozostałych (lub stwierdź, że się nie da):
(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$;
(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;
11. O wektorze U wiadomo, że: (1) jest wektorem wodzącym punktu leżącego na płaszczyźnie $x-y+2z+3 = 0$, (2) jest prostopadły do wektora $W = (1,0,-3)^\top$, (3) równoległościan zbudowany na wektorach U, W, $(-2,-1,1)^\top$ ma objętość 72. Znajdź U.
12. Oblicz odległość punktu $(1,2,3)^\top$ od (a) prostej $\frac{x-1}{3} = \frac{2y+4}{3} = \frac{z+1}{1}$; (b) płaszczyzny $2x - y + 2 = 5$. Użyj geometrycznej interpretacji iloczynu wektorowego / wyznacznika.
13. Rozwiąż poniższe układy swoim ulubionym sposobem, jak również używając wzorów Cramera.
$(a) \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$ $(b) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ $(c) \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$
14. Wyznacz wielomian $f(x)$ drugiego stopnia, taki że $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.
15. Sprawdź, że $\det(A+B, B+C, C+A) = 2\det(A,B,C)$, $(x-y)(y-z)(z-x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$.
16. Sprawdź, czy podane układy wektorów są dodatnio czy ujemnie zorientowane:
(a) $(1,6,3)^\top$, $(-1,0,2)^\top$, $(2,1,1)^\top$ (b) $(1,6,3)^\top$, $(2,-1,1)^\top$, $(-1,7,2)^\top$
17. Uzasadnij, że jeśli układ A, B, C jest dodatnio zorientowany, to również układy $-A$, $-B$, C; $A+B$, B, C są dodatnio zorientowane.

---

18. Jaka jest największa możliwa wartość wyznacznika 3×3, którego każdy wyraz jest równy 0 lub 1?
19. Załóżmy, że każdy wyraz pewnego wyznacznika 3×3 jest co do modułu nie większy niż 1. Udowodnij, że wartość tego wyznacznika jest < 6. Czy potrafisz wzmocnić tą nierówność?
20. Niech $\Psi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ będzie odwzorowaniem liniowym. Pokaż że istnieje wektor $A \in \mathbf{R}^3$ (zależący od Ψ), taki że $\Psi(X) = \langle X, A \rangle$.
21. Załóżmy, że $\Phi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ jest 2-liniowa i antysymetryczna. Udowodnij, że istnieje wektor $V \in \mathbf{R}^3$ (zależący od Φ), taki że dla wszystkich $X, Y \in \mathbf{R}^3$ zachodzi $\Phi(X,Y) = \langle X \times Y, V \rangle$.
22. Czy da się zrzutować (prostopadle) sześcian na prostą tak, by rzuty wierzchołków podzieliły tę prostą na 7 odcinków równej długości (i dwie półproste)?