Algebra liniowa 1R, Lista 11

1. Uzasadnij: $\ker(F\circ G)\supseteq \ker(G)$, $\mathrm{Im}(F\circ G)\subseteq \mathrm{Im}(F)$. ($F, G$ to przekształcenia liniowe)
2. Znajdź nieparametryczne równania opisujące obrazy i jądra przekształceń $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^k$ o macierzach: $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -3 & 6 & -9\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$;
3. Znajdź postać ogólną rozwiązania układu $AX=Y$ (a) dla: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 7 & -4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & 9 & -6\\ -2 & -6 & 4\end{pmatrix}$; $Y=(0,0,0)^\top, (1,1,1)^\top, (1,-2,3)^\top, (-6,-3,3)^\top, (2,4,2)^\top$, $(-1,3,0)^\top, (1,0,3)^\top, (1,3,0)^\top, (4,12,-8)^\top$; (b) dla $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -3 & 6 & -9\end{pmatrix}$; $Y=\binom{0}{0}, \binom{2}{0}, \binom{-5}{15}, \binom{90}{-30}$.
4. Udowodnij, że jeśli układ $AX=Y$ ma dwa rozwiązania, to ma ich nieskończenie wiele.
5. Znajdź M^{-1}. Wypróbuj wszelkie znane Ci sposoby. $M=$ $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}5 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 6 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$.

---

6. Znajdź macierz (a) rzutu (prostokątnego) na płaszczyznę $3x+2y-z=0$; (b) rzutu (prostokątnego) na prostą $X=t(1,0,-7)^\top$; (c) symetrii względem prostej $X=t(-1,2,1)^\top$.
7. Napisz macierze obrotów o kąt θ wokół osi OX i wokół osi OY. Dla $\theta=\pi/2$ oblicz złożenia tych obrotów w obu możliwych kolejnościach.
8. Znajdź macierz obrotu o $2\pi/3$ wokół prostej $x=y=z$. (Są dwa takie obroty; wybierz jeden z nich.)
9. Niech $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ i $G:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ będą odwzorowaniami liniowymi.
   a) Uzasadnij, że F nie jest na.
   b) Uzasadnij, że G nie jest $1-1$.
   c) Uzasadnij, że $F\circ G$ nie jest odwracalne.
10. Podaj przykłady przekształceń liniowych $F,G:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, takich że (a) $\ker(F)\subset\mathrm{Im}(F)$ (b) $\mathrm{Im}(G)\subset\ker(G)$. Postaraj się znaleźć zarówno nietrywialne, jak i trywialne przykłady.
11. Podaj przykład przekształcenia liniowego $F\colon\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, którego obraz jest płaszczyzną, jądro jest prostą, zaś kąt między jądrem a obrazem wynosi $60°$. (Napisz macierz takiego przekształcenia.)
12. O liniowych przekształceniach $F,G,H:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ wiadomo, że: $F\circ G\circ H$ jest na, $\det(G)=-4$, $H=F\circ G\circ F$. Udowodnij, że F jest różnowartościowe.
13. Uzasadnij, że jeśli $N^3=0$, to $(I+N)^{-1}=I-N+N^2$. Użyj tego wzoru by policzyć $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$.
14. Czy prawdziwe są (dla odwracalnych macierzy 3×3) wzory: $(MN)^{-1}=M^{-1}N^{-1}$, $(M+N)^{-1}=M^{-1}+N^{-1}$, $\det(aM)=a\det(M)$, $\det(M+N)=\det(M)+\det(N)$?
15. Uzasadnij, że dla dowolnego wektora $A\in\mathbf{R}^3$ przekształcenie M_A zadane wzorem $M_A(X)=A\times X$ jest liniowe. Wyraź jego macierz przez współrzędne wektora A.

---

16. W oznaczeniach poprzedniego zadania, znajdź macierz przekształcenia $M_A\circ M_B-M_B\circ M_A$ (wyraź jej wyrazy przez współrzędne A, B). Przyjrzyj się tej macierzy uważnie.
17. Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix}121 & -248\\ -321 & 625\\ 144 & -91\end{pmatrix}\begin{pmatrix}321 & 231 & 123\\ -619 & 26 & -17\end{pmatrix}$.
18. Niech $M,N\in M_{3\times 3}$, przy czym $\det(MN)\neq 0$. Uzasadnij, że macierze M i N są odwracalne.
19. Uzasadnij, że istnieje $\epsilon>0$, taki że jeśli macierz N spełnia warunek: $(\forall i,j\in\{1,2,3\})(|N_{ij}|<\epsilon)$, to macierz $I+N$ jest odwracalna. Czy potrafisz podać jakąś konkretną wartość ϵ spełniającą powyższą tezę (im większa tym lepsza)?
20. Niech $F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ będzie liniowe. Uzasadnij, że jeśli $\ker(F)$ jest jednopunktowe/prostą/płaszczyzną/$\mathbf{R}^3$, to $\mathrm{Im}(F)$ jest $\mathbf{R}^3$/płaszczyzną/prostą/jednopunktowe, odpowiednio.
21. Niech M będzie macierzą 2×2 o wyrazach całkowitych. Załóżmy, że $M^n=I$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n. Udowodnij, że $M^{12}=I$.