

Algebra liniowa 1R, lista 13

1. Załóżmy, że $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$ jest symetryczna, $AX = \lambda X$, $AY = \mu Y$, $\langle X, Y \rangle \neq 0$. Udowodnij, że wtedy każda liniowa kombinacja wektorów X i Y jest wektorem własnym A .
2. Napisz formę kwadratową Q na $\mathbf{R}^3$, taką że $Q((1, 2, 3)^\top) = -7$.
3. Niech $Q((x, y, z)^\top) = xy + yz + zx$. Wskaż wektor U , taki że: (a) $Q(U) = 1$; (b) $Q(U) = -1$; (c) $Q(U) = 0$.
4. Naszkicuj powierzchnie: $x^2 = 0$, $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 0$, $x^2 + z^2 = 0$, $x^2 + z^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z - y^2 = 0$.
5. Podaj przykład równania stopnia 2 trzech zmiennych którego zbiór rozwiązań jest prostą w $\mathbf{R}^3$.

6. Znajdź macierz złożenia obrotu prawoskrętnego wokół prostej $X = t(2, 1, 2)^\top$ o kąt $\frac{\pi}{4}$ (przekształcenia $R_{(2,1,2)^\top, \frac{\pi}{4}}$) i odbicia w płaszczyźnie prostopadłej do osi tego obrotu.
7. Niech A będzie liniową izometrią $\mathbf{R}^3$ zmieniającą orientację, taką że liczba 1 jest jej wartością własną. Uzasadnij, że A jest odbiciem względem pewnej płaszczyzny.
8. Znajdź symetryczną macierz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, taką że $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, a liczba 3 jest wartością własną A .
9. Znajdź symetryczną macierz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, taką że $\chi_A(x) = 2x^2 - x^3$, a każdy wektor płaszczyzny $2x + y + z = 0$ jest wektorem własnym A .
10. Podaj przykład macierzy symetrycznej $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, takiej że wektory $(1, -1, 0)^\top$, $(0, 1, -1)^\top$ i $(1, 0, -1)^\top$ są jej wektorami własnymi, a wektor $(1, 2, 3)^\top$ nie jest jej wektorem własnym.
11. Podaj przykład macierzy symetrycznej S rozmiaru 3×3 oraz jej trzech liniowo niezależnych wektorów własnych, z których żadne dwa nie są prostopadłe.
12. Załóżmy, że X jest wektorem własnym macierzy $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$ spełniającej warunek $A^\top = I - A$. Udowodnij, że jeśli $Y \perp X$, to $AY \perp X$.
13. Udowodnij, że jeśli liniowo niezależne wektory $X, Y \in \mathbf{R}^3$ są wektorami własnymi macierzy symetrycznej $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, to również wektor $X \times Y$ jest wektorem własnym tej macierzy.
14. Podaj przykład formy kwadratowej Q na $\mathbf{R}^3$, takiej że $Q(E_1), Q(E_2), Q(E_3) > 0$, ale dla pewnego $U \in \mathbf{R}^3$ mamy $Q(U) < 0$.
15. Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbf{R}^3$, zaś $U, V \in \mathbf{R}^3$ będą takie, że $Q(U) = -Q(V) = 1$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele wektorów $W \in \mathbf{R}^3$, takich że $Q(W) = 0$.

16. Wiadomo, że powierzchnia stopnia 2 zadana równaniem $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 + g = 0$ może być elipsoidą, hiperboloidą jednopowłokową, hiperboloidą dwupowłokową, ... Uzupełnij tę listę rozważając wszystkie możliwe postacie kanoniczne powyższego równania. Uwzględnij także przypadki zdegenerowane, jak np. punkt.
17. Przedstaw elipsoidę o długościach półosi a, b, c jako obraz sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przez odpowiednie przekształcenie liniowe $\mathbf{R}^3$. Znając wzór na objętość kuli i wiedząc jak zmienia się objętość pod wpływem przekształcenia liniowego oblicz objętość obszaru ograniczonego tą elipsoidą.
18. Oblicz objętość obszaru ograniczonego elipsoidą $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4yz = 1$.
19. Załóżmy, że $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ jest przekształceniem liniowym które diagonalizuje się w bazie (X, Y, Z) , i że ma ono trzy różne wartości własne. Udowodnij, że każdy wektor własny F jest skalarną krotnością wektora X , Y lub Z .
20. Uzasadnij, że dla dowolnej elipsoidy istnieje płaszczyzna, taka że ich przekrój jest okręgiem.