

Algebra liniowa 1R, Lista 2

1. Przedstaw wektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ jako kombinację liniową wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 2. Dane są wektory $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. O ile to możliwe, przedstaw (a) A jako kombinację liniową B i C , (b) B jako kombinację liniową A i C , (c) C jako kombinację liniową B i A .
 3. Dla jakich x następujące pary wektorów są liniowo zależne?
(a) $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ x \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$.
 4. Uzasadnij, że jeśli U i V są liniowo niezależne, to również U i $U + V$ są liniowo niezależne.
 5. Używając wzorów wyznacznikowych znajdź rozwiązanie układu równań
$$\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = -2 \end{cases}$$
-
6. Wiadomo, że $\det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U\right) = 1$ oraz że $\|U\| = 2$. Co można powiedzieć o U ?
 7. Sprawdź własności wyznacznika podane na wykładzie. Sprawdź poprawność wzorów Cramera.
 8. Czy para wektorów $U = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ jest dodatnio zorientowana? Oblicz pole równoległoboku rozpiętego przez wektory U i V jak również pole trójkąta OUV .
 9. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.
 10. Dla jakich a, b układ równań
$$\begin{cases} -2x + 3y = a \\ 4x - 6y = b \end{cases}$$
 ma rozwiązanie?
 11. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz jego pole $s = 17$. Wyznacz współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków wiedząc, że punkt przecięcia przekątnych znajduje się na osi OY .
 12. Niech $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Rozważając znaki stosownych wyznaczników, rozstrzygnij czy punkty M i N leżą po tej samej stronie prostej AB .
 13. Czy istnieją na płaszczyźnie wektory U, W , takie że $\langle U, W \rangle = 3$, $\|U\| = 4$, $\|W\| = 5$? Co gdy trójkę 3,4,5 zastąpimy przez 3,2,1? Uogólnij.
 14. Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań układu 2 równań liniowych z dwiema niewiadomymi w przypadku, gdy wyznacznik główny jest równy 0. Staraj się formułować swe tezy na możliwie wiele sposobów (w terminach: przecinania się prostych; liniowej zależności wektorów; zerowania się wyznaczników W_x , W_y , W). Podaj przykłady.
 15. Udowodnij, że układ 2 równań liniowych z dwoma niewiadomymi, o zerowych prawych stronach, ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy jego wyznacznik główny jest równy 0.
 16. Jaką figurę geometryczną może tworzyć zbiór wszystkich kombinacji liniowych dwóch ustalonych wektorów z $\mathbf{R}^2$?
-
17. Załóżmy, że układ 2 równań liniowych o wymiernych współczynnikach i wymiernych prawych stronach ma rozwiązanie różne od $(0, 0)$. Udowodnij, że ma on wówczas rozwiązanie (x, y) różne od $(0, 0)$ i przy tym takie, że x i y są wymierne.
 18. Niech $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją przypisującą parom wektorów liczby rzeczywiste. Załóżmy, że F jest dwuliniowa, oraz że dla każdego wektora $U \in \mathbf{R}^2$ zachodzi $F(U, U) = 0$. Udowodnij, że F jest antysymetryczna.
 19. Niech $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją przypisującą parom wektorów liczby rzeczywiste. Załóżmy, że F jest dwuliniowa i antysymetryczna. Udowodnij, że istnieje stała $C \in \mathbf{R}$, taka że dla dowolnych $U, V \in \mathbf{R}^2$ zachodzi wzór $F(U, V) = C \cdot \det(U, V)$.
 20. Na tablicy napisana jest trójka liczb. Ruch polega na wybraniu jednej z nich i zastąpieniu jej sumą tej liczby i różnicy dwóch pozostałych liczb pomnożonej przez dowolną liczbę wymierną. Rozstrzygnij, czy startując od trójki liczb $0, 1, \sqrt{2}$ przy pomocy takich ruchów można otrzymać trójkę (nieuporządkowaną) $0, \sqrt{2}, 2$.

Algebra liniowa 1, wariant R

Wykład: wtorki, 8:15-10:00, s. 601; piątki, 8:15-9:00, s. WS; konwersatorium: piątki, 9:15-10:00, s. WS.
Konsultacje: wtorki i piątki 7:30-8, środy 11-12, + na zamówienie (jan.dymara@uw.edu.pl); s. 301.
Ćwiczenia: wtorki, 10:15-12, s. 601 (J. Dymara), s. 603 (J. Gogolok).

Program wykładu:

1. $\mathbf{R}^2$: wektory, iloczyn skalarny, równania prostych.
2. Wyznacznik i liniowa niezależność na płaszczyźnie. Układy równań liniowych.
3. Przekształcenia liniowe płaszczyzny: macierze, składanie, odwracanie.
4. Diagonalizacja przekształceń płaszczyzny.
5. Izometrie płaszczyzny.
6. Krzywe stopnia 2: formy kwadratowe, twierdzenie spektralne.
7. Liczby zespolone.
8. $\mathbf{R}^3$: równania prostych i płaszczyzn, iloczyn skalarny i wektorowy.
9. Wyznacznik 3×3 , liniowa niezależność.
10. Układy równań, przekształcenia liniowe i ich macierze.
11. Diagonalizacja przekształceń $\mathbf{R}^3$.
12. Izometrie $\mathbf{R}^3$.
13. Twierdzenie spektralne w $\mathbf{R}^3$.
14. Formy kwadratowe trzech zmiennych i powierzchnie stopnia 2.
15. Twierdzenie Jordana dla przekształceń $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$; jego zastosowania do równań różniczkowych.

Pomocna literatura:

T.Banchoff, J.Wermer, Linear Algebra Through Geometry.
Matematyka w szkole średniej, rozdziały: 14, 18, 21, 26, 32, 40.
A.I. Kostrikin, Wstęp do algebry.
A.I.Kostrikin, Y.I.Manin, Algebra liniowa i geometria. (dla nienasyconych)
L. Jankowski, G. Szkapiać, Algebra liniowa (skrypt, dostępny pod fricas.org/~dymara/Gala25/skrypt.pdf)
J. Rutkowski, Algebra liniowa w zadaniach.
Zbiór zadań z algebry (pod red. Kostrikina).

Zasady zaliczania.

Lista zadań. Co tydzień na stronie

fricas.org/~dymara/Gala25/mat.html

będzie umieszczana lista zadań. Na liście będą proste zadania (nad pierwszą kreską), poważniejsze zadania (między kreskami) oraz trudniejsze zadania (pod drugą kreską). Wybrane zadania z listy będą omawiane na ćwiczeniach w kolejnym tygodniu – *przed* tymi ćwiczeniami student powinien rozwiązać wszystkie zadania proste i większość zadań poważniejszych. W razie problemów należy szukać pomocy na konsultacjach lub w tutorii.

Sprawdziany. W piątki często będą sprawdziany: 17.X, 31.X, 5.XII, 19.XII i 30.I kartkówki (8:15-9:00), zaś 21.XI i 16.I kolokwia (8:15-10:00).

Sprawdzian obejmuje materiał do listy omawianej na poprzednich ćwiczeniach włącznie.

Zaliczenie. Do zdobycia jest $5 \times 9 + 2 \times 30 = 100$ pkt. Progi na poszczególne oceny: 5 – 80 pkt.; 4,5 – 70 pkt.; 4 – 60 pkt.; 3,5 – 50 pkt.; 3 – 40 pkt.

Prowadzący ćwiczenia ma prawo podnieść ocenę o 0,5 na podstawie całokształtu pracy studenta (uwzględniając w szczególności aktywność na ćwiczeniach, systematyczność pracy, czynione postępy w nauce oraz odległość od progu na wyższą ocenę).

Za trudno? Przez jakiś czas możliwe są przenosiny na teoretycznie łatwiejszy kurs Algebry liniowej 1.