

Algebra liniowa 1R, Lista 8 $\frac{1}{2}$

1. Znajdź jawny wzór na n -ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

2. Znajdź jawny wzór na n -ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie:

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \quad a_0 = 1, a_1 = 5.$$

3. Znajdź jawny wzór na n -ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie:

$$a_{n+2} = 2\sqrt{3}a_{n+1} - 4a_n, \quad a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = 0.$$

Udowodnij, że dla każdego n zachodzi nierówność $|a_n| \leq 2^n$, przy czym dla nieskończenie wielu n jest ona równością.

4. Ciągi (a_n) , (b_n) są opisane zależnościami rekurencyjnymi:

$$a_{n+1} = -13a_n - 4b_n, \quad b_{n+1} = 25a_n + 7b_n, \quad a_0 = 1, b_0 = -3.$$

Znajdź jawne wzory na a_n i b_n .

-
5. Wyznacz równanie ogólne obrazu i przeciwobrazu prostej $4x + 3y = 7$ przez przekształcenie liniowe o macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
6. Wyznacz równanie ogólne obrazu i przeciwobrazu prostej $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ przez przekształcenie liniowe o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Wyznacz równanie obrazu paraboli $x = y^2$ przez przekształcenie liniowe o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
8. Wyznacz równanie obrazu hiperboli $xy = 1$ przez przekształcenie opisane wzorem $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y+2 \\ x+y-1 \end{pmatrix}$.
9. Osie, początek i wersory standardowego układu współrzędnych OXY przeniesiono przez przekształcenie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y-2 \\ -x+y+3 \end{pmatrix}$, otrzymując osie, początek i wersory pewnego nowego, nieprostokątnego i nieliniowego układu współrzędnych $O'X'Y'$. Wyznacz równania opisujące osie starego układu (proste OX , OY) w nowych współrzędnych (x', y') .
10. Wyznacz pole obrazu pełnej elipsy $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1$ przez przekształcenie będące złożeniem przekształcenia liniowego o macierzy $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i translacji o wektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.
-
11. Wyznacz środek i kąt obrotu zadanego wzorem $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - 3 \end{pmatrix}$.
12. Zapisz obrót o $\pi/6$ wokół punktu $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ w postaci $T_V \circ F_A$, dla odpowiednio dobranych $V \in \mathbf{R}^2$, $A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$.
13. Zapisz symetrię względem prostej $3x - 4y = 7$ w postaci $T_V \circ F_A$, dla odpowiednio dobranych $V \in \mathbf{R}^2$, $A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$.
14. Niech $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2 \\ -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 \end{pmatrix}$. Znajdź równanie ogólne prostej ℓ spełniającej $F[\ell] = \ell$.