

Definicja. Przekształceniem płaszczyzny nazywamy dowolną funkcję $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, czyli funkcję, która parom liczb przypisuje pary liczb.

Przykład.

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + \sin y \\ \sqrt{1+y^2} \cdot x^7 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ liniowe: $0 \mapsto 0$
Liniowe?

Przykłady

1) Przesunięcie o wektor U

Translacja

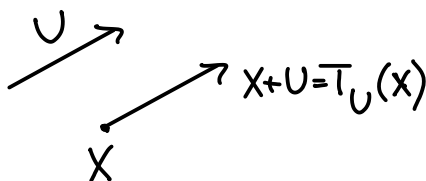
$$T_U(X) = X + U$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$T_U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u_1 \\ y+u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{chyba że } U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Nie,

$$T_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Id \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix}$$



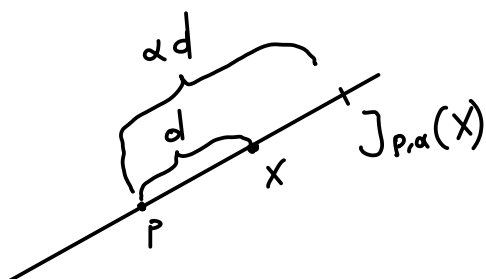
2) Jednośladowość (o środku p i skali α)

$$J_{p,\alpha} ; J_{0,\alpha} =: J_\alpha$$

Zwykle nie;

tak, gdy $p=0$ ($J=J_\alpha$)

oraz gdy $\alpha=1$ ($J=Id$)

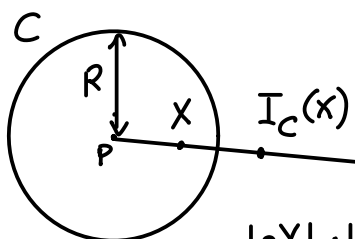


$$J_{p,\alpha} = T_p \circ J_\alpha \circ T_{-p}$$

$$J_\alpha(X) = \alpha X$$

$$J_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + \alpha y \end{pmatrix}$$

3) Inwersja (względem okręgu C)



$$|PX| \cdot |PI_C(X)| = R^2$$

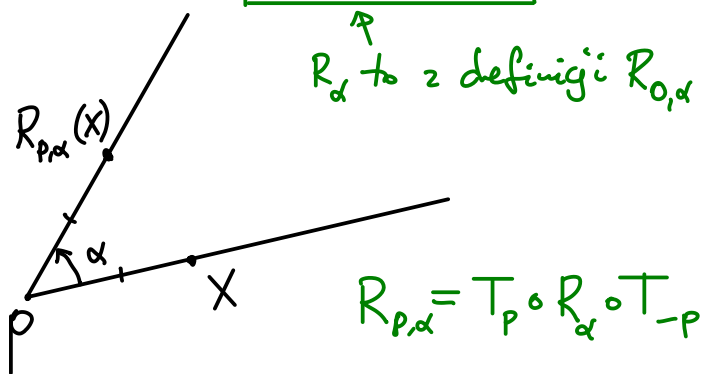
To jest przekształcenie $\mathbb{R}^2$ w sensie powyższej definicji.

$$m(J_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Inwersję można traktować jako przekształcenie $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, definiując $I_C(p) = \infty, I_C(\infty) = p$.

4) Obrót (wokół punktu p , o kąt α)

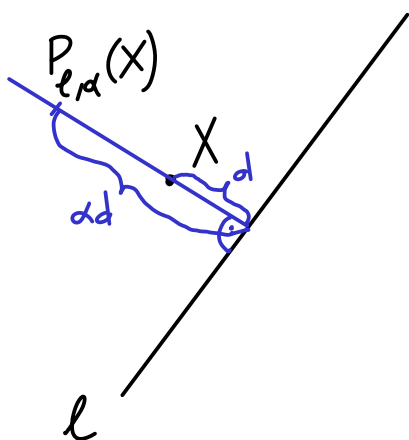
Rotacja: $R_{p,\alpha}$; $R_{0,\alpha} =: R_\alpha$



$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}$$

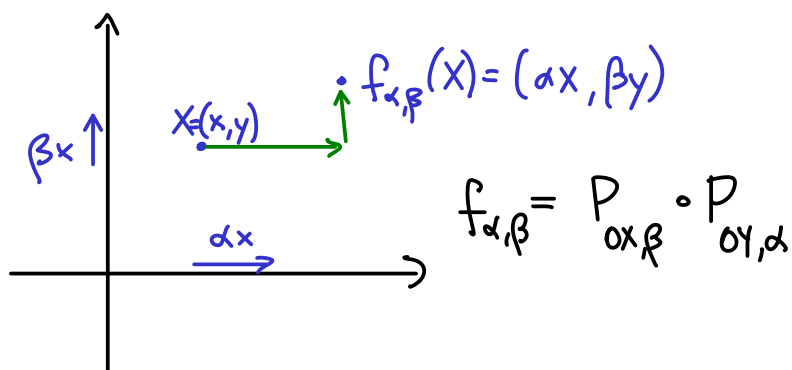
R_α jest liniowe

5) Powinnowactwo prostokątne (względem osi l , o składowe)



Liniowe jeśli
 $0 \in l$

6) ??? $f_{\alpha,\beta}$

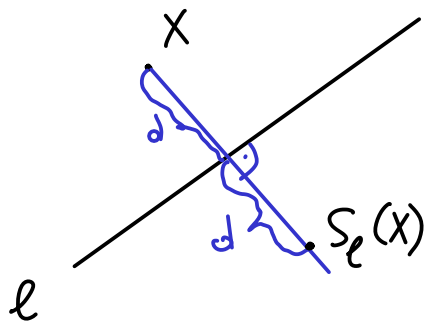


$$f_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + 0y \\ 0x + \beta y \end{pmatrix}$$

liniowe

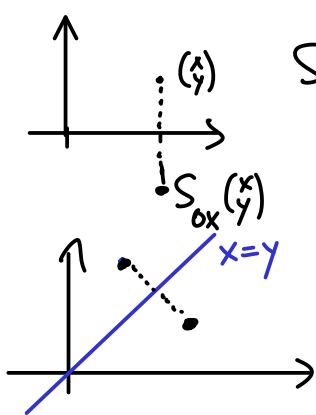
$$m(f_{\alpha,\beta}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

7) Odbicie (symetria) względem prostej l : S_l



liniowa
o ile $0 \in l$

$$S_l = P_{l,-1}$$



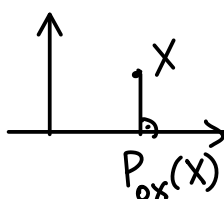
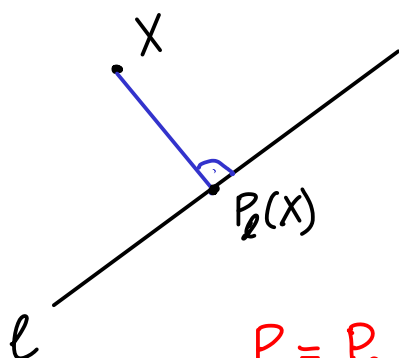
$$S_{0x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{pmatrix}$$

$$m(S_{0x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_{x=y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$m(S_{x=y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8) Rzut prostokątny (prostopadły) na prostą ℓ : P_ℓ

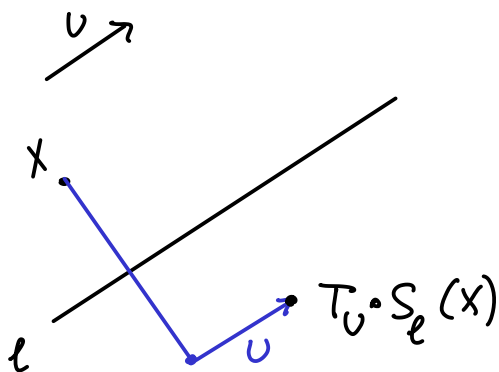


$$P_{0x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

liniowy
o ile $0 \in \ell$

$$P_\ell = P_{\ell, 0}$$

9) Odbicie z poślizgiem (względem pewnej prostej ℓ z poślizgiem o wektor $U \parallel \ell$)



ogólnie nie
(wyjątek: $U=0, 0 \in \ell$)

10) Przekształcenie identyfikacyjne Id

$$Id(X) = X$$

$$Id \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} \text{ liniowa}$$

$$m(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

11) Przekształcenie zerowe Z

$$Z(X) = 0$$

$$Z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y \end{pmatrix} \text{ liniowa}$$

$$m(Z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

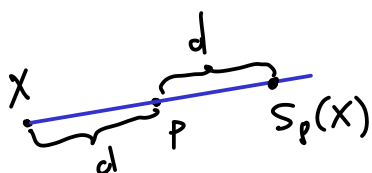
12) Odbicie (symetria) (względem punktu p)

$$S_0(X) = -X$$

$$S_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{pmatrix}$$

liniowa dla $p=0$

$$m(S_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



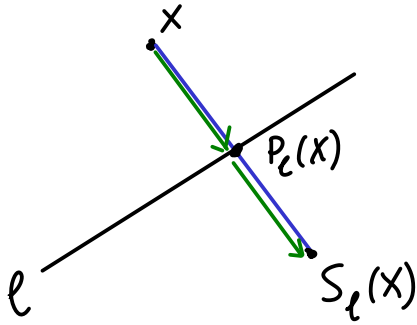
$$S_p = J_{p, -1} = R_{p, \pi}$$

Wzór we współrzędnych na rzut prostokątny na prostą ℓ : $X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$P_\ell \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{x+2y}{1+4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix}$$

Symetria względem prostej ℓ :

$$m(P_\ell) = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} S_\ell(X) &= X + 2(P_\ell(X) - X) = X + 2 \cdot P_\ell(X) - 2 \cdot X \\ &= \underline{2P_\ell(X) - X} \quad (= P_\ell(X) + (P_\ell(X) - X)) \end{aligned}$$

$$S_\ell \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2P_\ell \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y - x \\ \frac{4}{5}x + \frac{8}{5}y - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix}$$

$$m(S_\ell) = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Definicja. Przekształcenie $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ jest liniowe, jeśli jest postaci

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

(dla pewnych $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, zależnych od F).

Fakt. Niech $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Następujące warunki są równoważne.

- 1) F jest liniowe.
- 2) F jest
 - (a) addytywne: $(\forall X, Y \in \mathbf{R}^2)(F(X + Y) = F(X) + F(Y))$; oraz
 - (j) jednorodne: $(\forall X \in \mathbf{R}^2)(\forall t \in \mathbf{R})(F(tX) = tF(X))$.
- 3) $(\forall X, Y \in \mathbf{R}^2)(\forall t, s \in \mathbf{R})(F(tX + sY) = tF(X) + sF(Y))$.

Dowód.

1) $\Rightarrow$ 2) bezpośredni rachunek (ćwiczenie)

2) $\Rightarrow$ 3)

$$F(tX + sY) \stackrel{(a)}{=} F(tX) + F(sY) \stackrel{2 \times (j)}{=} tF(X) + sF(Y)$$

3) $\Rightarrow$ 1)

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= F \left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \stackrel{3)}{=} x \cdot \underbrace{F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\parallel \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}} + y \cdot \underbrace{F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Def Mamy przekształcenie liniowe danego wzorem

$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ nazywamy tablicą lub rozmiar 2×2 : $m(F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(kolumnami $m(F)$ są wektory $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

