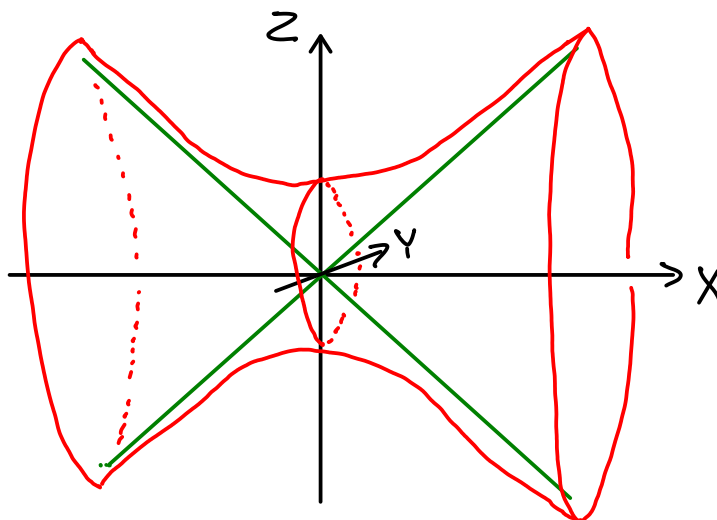


Przykłady powierzchni stopnia 2

4) $-x^2 + \overbrace{y^2 + z^2}^{\text{odległość } \left(\frac{x}{z}\right) \text{ od osi } OX \text{ (w kwadracie)}}$ = 1

- symetria obrotowa względem osi OX
- Przekrój z płaszczyzną OXZ:
 $y=0$
 $-x^2 + z^2 = 1$ - hiperbola
- Obracamy ten przekrój wokół OX



hiperboloidea jednopowłokowa

4') $-\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \leftarrow \text{hiperboloidea jednopowłokowa}$

$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0 \leftarrow \text{równanie stożka asymptotycznego}$

Uwaga

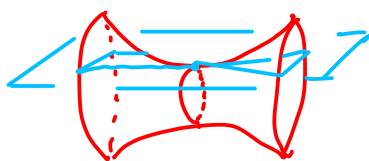
$-x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Przekrojamy płaszczyzną $z=1$:

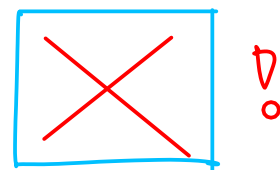
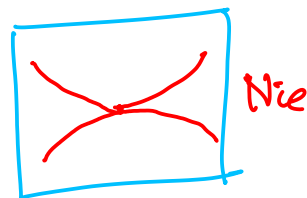
$-x^2 + y^2 + 1 = 1$

$y^2 - x^2 = 0$

$(y-x)(y+x) = 0 \Rightarrow y=x \text{ lub } y=-x$



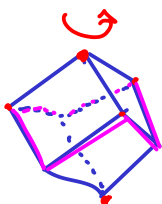
$z=1 \Rightarrow$



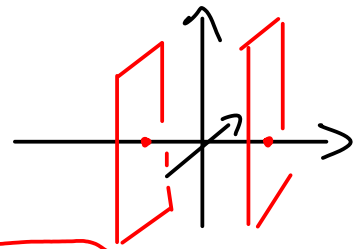
Wniosek: Hiperboloidea $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$ można stworzyć obracając

prostą $\begin{cases} y=x \\ z=1 \end{cases}$ wokół osi OX.

Pd:



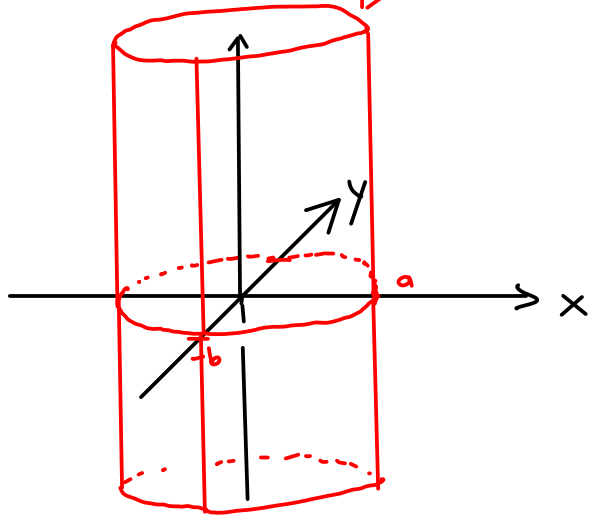
5) $X^2 = 1 \leadsto$ parę płaszczyzn: $x = \pm 1$



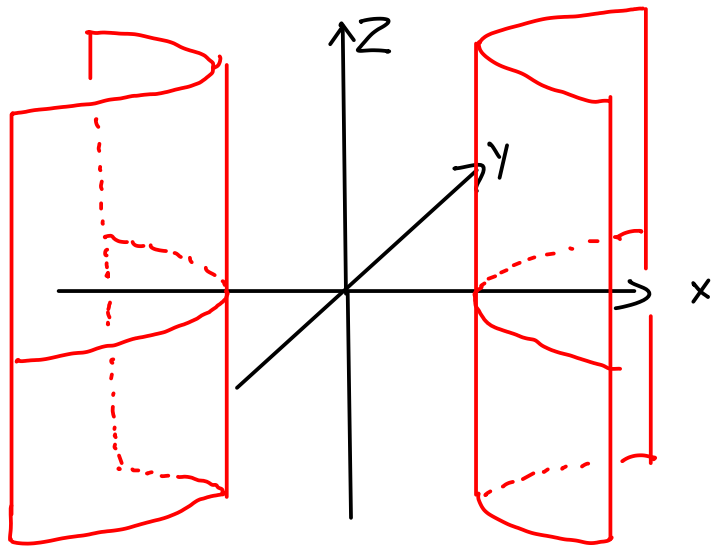
6) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \leadsto$ co zadaje w $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$$

walec
eliptyczny



7) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \leadsto$ walec hiperboliczny



Przykład.

$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz + 4zx = 1}_{Q(X)}$$

$$m(Q) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

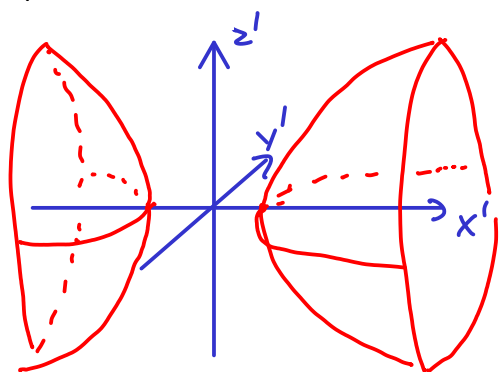
- wartości własne A to 5, -1, -1
- ortonormalna baza w. własnych A:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

we współrzędnych x', y', z' zniezających z tą bazą ortonormalną powierzchnia ma równanie:

$$5(x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = 1$$

$$\left(\frac{x'}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{1}\right)^2 - \left(\frac{z'}{1}\right)^2 = 1$$

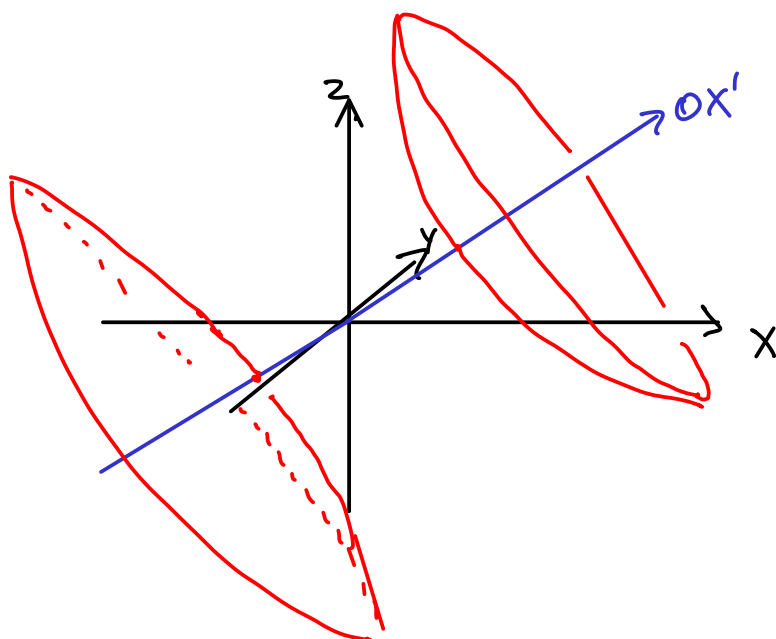


- hiperboloida dwupunktowa
- odległość punktów: $\frac{2}{\sqrt{5}}$
- kąty półoszarzania stożka asymptotycznego:

$$\tan \beta = \tan \gamma = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$$

Na te standardowych wsp.:

oś OX' ma kierunek $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Równania z wyrazami stopnia 1

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + \underline{2gx + 2hy + 2jz} + k = 0$$

Z takim równaniem radzimy sobie następująco.

- 1) Diagonalizujemy część kwadratową: znajdujemy liniowy prostokątny układ współrzędnych w którym forma kwadratowa $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ zapisze się w postaci $\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + \eta(z')^2$.
- 2) Przeliczamy część liniową $(2gx + 2hy + 2jz)$ na nowe współrzędne. Otrzymujemy równanie postaci

$$\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + \eta(z')^2 + 2g'x' + 2h'y' + 2j'z' + k = 0.$$

- 3) Uzupełniamy do kwadratu likwidując możliwie dużo wyrazów liniowych.
- 4) Jeśli jakieś wyrazy liniowe zostały, przekształcamy je w jeden wyraz liniowy przy okazji likwidując wyraz stały.

Przykład.

$$\underline{x^2} - \underline{2y^2} + \underline{2x} + \underline{4y} + z + 7 = 0$$

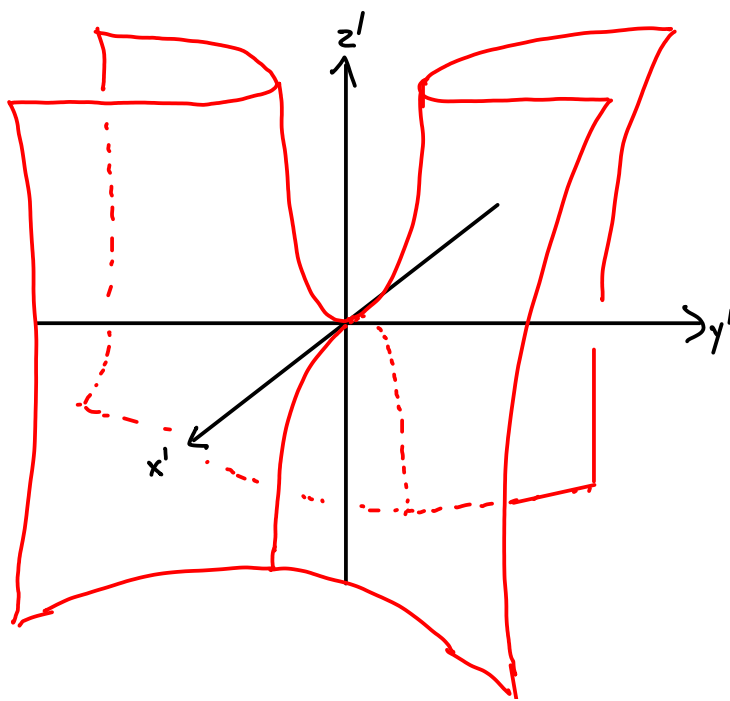
$$(x^2 + 2x + 1) - 2(y^2 - 2y + 1) + z + 7 - 1 + 2 = 0$$

$$\underbrace{(x+1)^2}_{x'} - 2 \underbrace{(y-1)^2}_{y'} + \underbrace{z + 8}_{z'} = 0$$

$$\boxed{z' = -(x')^2 + 2(y')^2} \quad (\text{postać kanoniczna})$$

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \\ z' = z + 8 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$z' = -(x')^2 + 2(y')^2$$



- paraboloida hiperboliczna
- powierzchnia siodłowa

Przykład.

$$x^2 + 2x + 3y - 4z + 7 = 0$$

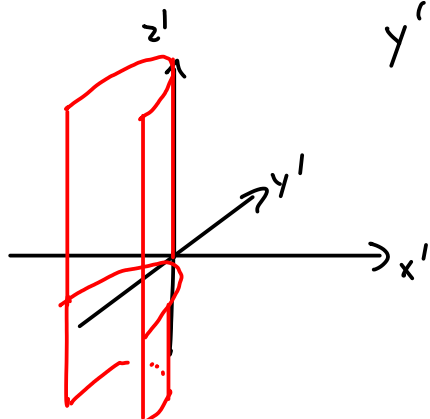
$$(x^2 + 2x + 1) + 3y - 4z + 7 - 1 = 0$$

$$\underbrace{(x+1)^2}_{x'} + \underbrace{3y - 4z + 6}_{5y'} = 0$$

$$(x')^2 + 5y' = 0$$

$$y' = -\frac{1}{5}(x')^2$$

$$\begin{cases} y' = \frac{3y - 4z + 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3y - 4z + 6}{5} \\ z' = \frac{4y + 3z}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \end{cases}$$



walec paraboliczny

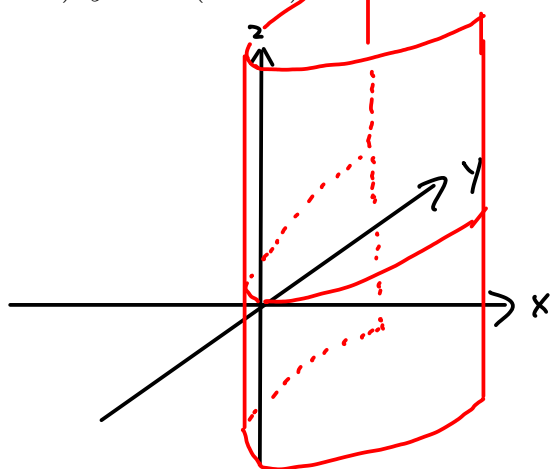
$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z + \frac{6}{5} \\ z' = \frac{4}{5}y + \frac{3}{5}z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{6}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑
macierz izometrii

Nowe powierzchnie:

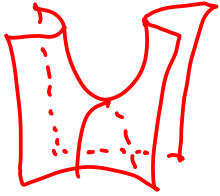
1) $y = x^2$ (w $\mathbf{R}^3$!)



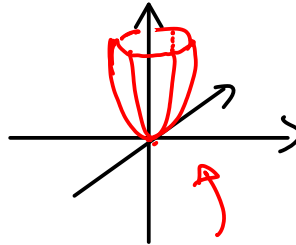
2) $z = \lambda x^2 + \mu y^2$

wykreś funkcję $f(x,y) = \lambda x^2 + \mu y^2$

a) Jeśli λ, μ są przeciwnych znaków:
powierzchnia siodłowa

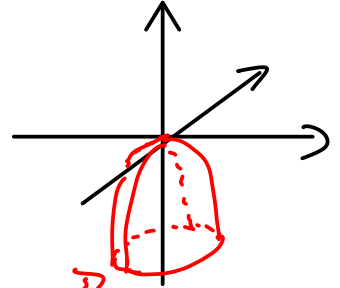


b) $\lambda, \mu > 0$:



paraboloida
eliptyczna

c) $\lambda, \mu < 0$



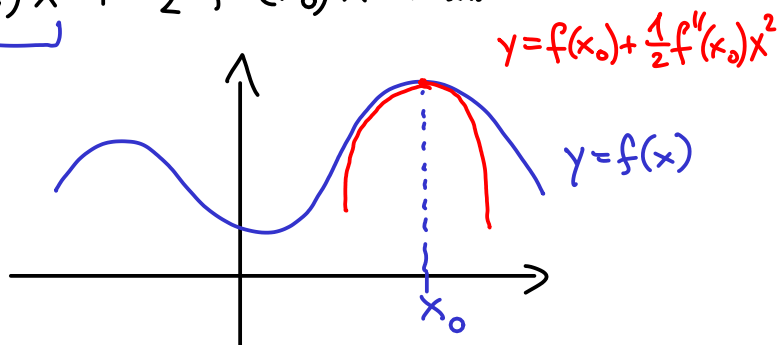
Dygresja analityczna

1) $y = f(x)$

lokalne ekstrema (max/min) :

• szukamy x_0 , takiego że $f'(x_0) = 0$

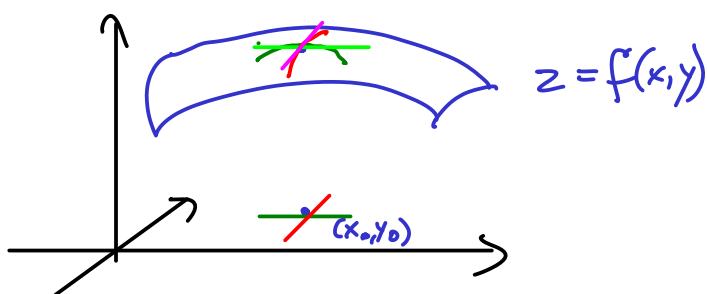
• $f(x_0 + x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_0 x + \frac{1}{2} f''(x_0) x^2 + \dots$



2) $z = f(x, y)$

lokalne ekstrema (max/min) .

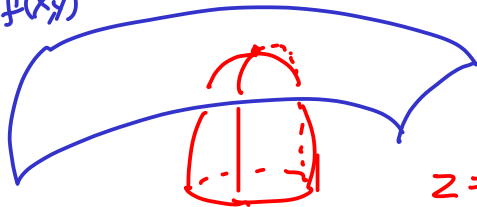
• $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\substack{\uparrow \text{ pochodna } f \text{ względem } x \\ \text{ przy ustalonym } y = y_0.}}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \leftarrow \text{warunek konieczny ekstremum}$



• $f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) y}_{0, \text{ bo } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ w } (x_0, y_0)}$

$+ \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) y^2 + \dots}_{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}$

$$z = f(x, y)$$



$$z = f(x_0, y_0) + \underbrace{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}$$

↑ paraboloidea eliptyczna → lokale
max/min

paraboloidea hiperboliczna → punkt
siodłowy