Algebra liniowa 1R, Lista 2

1. Przedstaw wektor $\binom{4}{-2}$ jako kombinację liniową wektorów $\binom{1}{1}$ i $\binom{-1}{1}$.
2. Dane są wektory $A = \binom{1}{0}$, $B = \binom{1}{1}$, $C = \binom{-1}{0}$. O ile to możliwe, przedstaw (a) A jako kombinację liniową B i C, (b) B jako kombinację liniową A i C, (c) C jako kombinację liniową B i A.
3. Dla jakich x następujące pary wektorów są liniowo zależne?
(a) $\binom{x}{1}, \binom{9}{3}$, (b) $\binom{x}{x^2}, \binom{-2}{4}$, (c) $\binom{x}{1}, \binom{4}{x}$, (d) $\binom{x}{x^2}, \binom{1}{x}$.
4. Uzasadnij, że jeśli U i V są liniowo niezależne, to rownież U i $U + V$ są liniowo niezależne.
5. Używając wzorów wyznacznikowych znajdź rozwiązanie układu równań $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = -2 \end{cases}$.

---

6. Wiadomo, że $\det\left(\binom{1}{0}, U\right) = 1$ oraz że $\|U\| = 2$. Co można powiedzieć o U?
7. Sprawdź własności wyznacznika podane na wykładzie. Sprawdź poprawność wzorów Cramera.
8. Czy para wektorów $U = \binom{-3}{2}$, $V = \binom{-4}{3}$ jest dodatnio zorientowana? Oblicz pole równoległoboku rozpiętego przez wektory U i V jak również pole trójkąta OUV.
9. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $\binom{-5}{2}$, $\binom{1}{4}$, $\binom{3}{-6}$.
10. Dla jakich a, b układ równań $\begin{cases} -2x + 3y = a \\ 4x - 6y = b \end{cases}$ ma rozwiązanie?
11. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku $A = \binom{2}{5}$ i $B = \binom{5}{1}$ oraz jego pole $s = 17$. Wyznacz współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków wiedząc, że punkt przecięcia przekątnych znajduje się na osi OY.
12. Niech $A = \binom{-2}{-3}$, $B = \binom{3}{2}$, $M = \binom{2}{0}$, $N = \binom{-4}{1}$. Rozważając znaki stosownych wyznaczników, rozstrzygnij czy punkty M i N leżą po tej samej stronie prostej AB.
13. Czy istnieją na płaszczyźnie wektory U, W, takie że $\langle U, W\rangle = 3$, $\|U\| = 4$, $\|W\| = 5$? Co gdy trójkę 3,4,5 zastąpimy przez 3,2,1? Uogólnij.
14. Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań układu 2 równań liniowych z dwiema niewiadomymi w przypadku, gdy wyznacznik główny jest równy 0. Staraj się formułować swe tezy na możliwie wiele sposobów (w terminach: przecinania się prostych; liniowej zależności wektorów; zerowania się wyznaczników W_x, W_y, W). Podaj przykłady.
15. Udowodnij, że układ 2 równań liniowych z dwoma niewiadomymi, o zerowych prawych stronach, ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy jego wyznacznik główny jest równy 0.
16. Jaką figurę geometryczną może tworzyć zbiór wszystkich kombinacji liniowych dwóch ustalonych wektorów z $\mathbf{R}^2$?

---

17. Załóżmy, że układ 2 równań liniowych o wymiernych współczynnikach i wymiernych prawych stronach ma rozwiązanie różne od $(0, 0)$. Udowodnij, że ma on wówczas rozwiązanie (x, y) różne od $(0, 0)$ i przy tym takie, że x i y są wymierne.
18. Niech $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ będzie funkcją przypisującą parom wektorów liczby rzeczywiste. Załóżmy, że F jest dwuliniowa, oraz że dla każdego wektora $U \in \mathbf{R}^2$ zachodzi $F(U, U) = 0$. Udowodnij, że F jest antysymetryczna.
19. Niech $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ będzie funkcją przypisującą parom wektorów liczby rzeczywiste. Załóżmy, że F jest dwuliniowa i antysymetryczna. Udowodnij, że istnieje stała $C \in \mathbf{R}$, taka że dla dowolnych $U, V \in \mathbf{R}$ zachodzi wzór $F(U, V) = C \cdot \det(U, V)$.
20. Na tablicy napisana jest trójka liczb. Ruch polega na wybraniu jednej z nich i zastąpieniu jej sumą tej liczby i różnicy dwóch pozostałych liczb pomnożonej przez dowolną liczbę wymierną. Rozstrzygnij, czy startując od trójki liczb $0, 1, \sqrt{2}$ przy pomocy takich ruchów można otrzymać trójkę (nieuporządkowaną) $0, \sqrt{2}, 2$.

Algebra liniowa 1, wariant R

Wykład: wtorki, 9:15-12:00, s. WS. konwersatorium: czwartki, 10:15-11:00, s. B.
Konsultacje: wtorki 8-9, czwartki 11-12, + na zamówienie (`jan.dymara@uwr.edu.pl`); s. 301.
Ćwiczenia: czwartki, 8:15-10, s. A (T. Rzepecki), s. B (J. Gogolok).

Program wykładu:
1. $\mathbf{R}^2$: wektory, iloczyn skalarny, równania prostych.
2. Wyznacznik i liniowa niezależność na płaszczyźnie. Układy równań liniowych.
3. Przekształcenia liniowe płaszczyzny: macierze, składanie, odwracanie.
4. Diagonalizacja przekształceń płaszczyzny.
5. Izometrie płaszczyzny.
6. Krzywe stopnia 2: formy kwadratowe, twierdzenie spektralne.
7. Liczby zespolone.
8. $\mathbf{R}^3$: równania prostych i płaszczyzn, iloczyn skalarny i wektorowy.
9. Wyznacznik 3×3, liniowa niezależność.
10. Układy równań, przekształcenia liniowe i ich macierze.
11. Diagonalizacja przekształceń $\mathbf{R}^3$.
12. Izometrie $\mathbf{R}^3$.
13. Twierdzenie spektralne w $\mathbf{R}^3$.
14. Formy kwadratowe trzech zmiennych i powierzchnie stopnia 2.
15. Twierdzenie Jordana dla przekształceń $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$; jego zastosowania do równań różniczkowych.

Pomocna literatura:
T.Banchoff, J.Wermer, Linear Algebra Through Geometry.
Matematyka w szkole średniej, rozdziały: 14, 18, 21, 26, 32, 40.
A.I. Kostrikin, Wstęp do algebry.
A.I.Kostrikin, Y.I.Manin, Algebra liniowa i geometria. (dla nienasyconych)
L. Jankowski, G. Szkapiak, Algebra liniowa (skrypt, dostępny pod
`fricas.org/~dymara/GalA26/skrypt.pdf`)
J. Rutkowski, Algebra liniowa w zadaniach.
Zbiór zadań z algebry (pod red. Kostrikina).

Zasady zaliczania.

Lista zadań. Co tydzień na stronie
`fricas.org/~dymara/GalA26/mat.html`
będzie umieszczana lista zadań. Na liście będą proste zadania (nad pierwszą kreską), poważniejsze zadania (między kreskami) oraz trudniejsze zadania (pod drugą kreską). Wybrane zadania z listy będą omawiane na ćwiczeniach – *przed* tymi ćwiczeniami student powinien rozwiązać wszystkie zadania proste i większość zadań poważniejszych. W razie problemów należy szukać pomocy na konsultacjach lub w tutorni.

Sprawdziany. Krótkie (15-30 minut) kartkówki odbędą się 20 X, 3 XI, 1 XII, 15 XII i 26 I na początku wykładu (9:15). Kolokwia odbędą się 19 XI i 14 I na ćwiczeniach.

Sprawdzian obejmuje materiał do listy omawianej na poprzednich ćwiczeniach włącznie.

Zaliczenie. Do zdobycia jest $5 \times 8 + 2 \times 30 = 100$ pkt. Progi na poszczególne oceny: 5 – 80 pkt.; 4,5 – 70 pkt.; 4 – 60 pkt.; 3,5 – 50 pkt.; 3 – 40 pkt.

Prowadzący ćwiczenia ma prawo podnieść ocenę o 0,5 na podstawie całokształtu pracy studenta (uwzględniając w szczególności aktywność na ćwiczeniach, systematyczność pracy, czynione postępy w nauce oraz odległość od progu na wyższą ocenę).

Za trudno? Przez jakiś czas możliwe są przenosiny na teoretycznie łatwiejszy kurs Algebry liniowej 1.