

Algebra liniowa 1R, Lista 3

1. a) Sprawdź, że przekształcenie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ jest addytywne i jednorodne.
 b) Sprawdź, że dla dowolnych macierzy M, N i wektora U zachodzi $(MN)U = M(NU)$.
 c) Udowodnij bezpośrednim rachunkiem wzór $\det(MN) = \det M \det N$.
2. Oblicz MN oraz NM dla (a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Znajdź macierze P_U oraz S_U gdy $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
4. Narysuj w układzie współrzędnych obraz siatki $\{(x, y) : (x \in \mathbf{Z}) \vee (y \in \mathbf{Z})\}$ przez przekształcenie liniowe zadane macierzą: (a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Uzasadnij równości: $M(N+P) = MN + MP$, $(M+N)P = MP + NP$, $t(MN) = (tM)N = M(tN)$, $\det(tM) = t^2 \det(M)$, (M, N, P są macierzami, $t \in \mathbf{R}$).

6. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Oblicz A^2 , A^3 i A^4 . Sformułuj narzucającą się hipotezę, a następnie udowodnij ją indukcyjnie.
7. Znajdź wzór we współrzędnych opisujący przekształcenie:
 (a) $P_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$, (b) $T_{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} \circ P_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$, (c) $R_\pi \circ T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$, (d) $R_{\pi/3}$.
8. Znajdź macierz liniowego przekształcenia płaszczyzny F wiedząc że (a) $F\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, (b) $F\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
9. Czy prawdziwy jest wzór $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$? Udowodnij lub podaj kontrprzykład.
10. Znajdź przekształcenie liniowe $J: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, takie by dla dowolnych $U, V \in \mathbf{R}^2$ zachodził wzór $\det(U, V) = \langle U, J(V) \rangle$.
11. Znajdź wszystkie macierze M takie, że $M \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} M$.
12. Sprawdź, że pomnożenie dowolnej macierzy M przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ z lewej strony zamienia rzędy macierzy M , zaś z prawej strony – zamienia jej kolumny. Opisz słowami co dzieje się z macierzą M po pomnożeniu jej z prawej strony przez $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
13. Niech S_x, S_y będą odbiciami względem osi układu, P_x, P_y rzutami prostokątnymi na osie, J_r jednokładnością o skali r (względem początku układu) zaś R_θ obrotem o kąt θ (wokół początku układu).
 (a) Napisz macierze powyższych przekształceń.
 (b) Posługując się macierzami uzasadnij, że $R_{\pi/2} \circ S_x \circ R_{-\pi/2} = S_y$, $J_r \circ J_s = J_{rs}$, $R_\theta \circ R_\phi = R_{\theta+\phi}$.
 (c) Posługując się macierzami rozpoznaj następujące przekształcenia złożone: $R_{\pi/2} \circ P_y \circ R_{-\pi/2}$, $S_x \circ S_y$, $S_x \circ P_x$, $P_x \circ S_x$, $P_x \circ P_y$.
14. Niech $U, W \in \mathbf{R}^2$ będą liniowo niezależne.
 a) Uzasadnij, że dowolny $X \in \mathbf{R}^2$ zapisuje się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej U, W .
 b) Uzasadnij, że jeśli F, G są przekształceniami liniowymi płaszczyzny, takimi że $F(U) = G(U)$ i $F(W) = G(W)$, to $F = G$.
 c) Uzasadnij, że dla dowolnych wektorów A, B istnieje (jedyne) przekształcenie liniowe płaszczyzny F , takie że $F(U) = A$, $F(W) = B$.

15. Napisz we współrzędnych wzór na S_ℓ , gdzie ℓ jest prostą $2x + 3y = 5$.
16. Niech A, B będą macierzami 2×2 . Uzasadnij, że jeśli $AB = I$, to $BA = I$.
17. Udowodnij, że dla każdej macierzy A o niezerowym wyznaczniku istnieje liczba $\epsilon > 0$, taka że jeśli wyrazy macierzy B różnią się od odpowiadających im miejscami wyrazów macierzy A o mniej niż ϵ , to macierz B też ma niezerowy wyznacznik.
- 18.^K Niech $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ będzie przekształceniem różnowartościowym i na (surjektywnym), przy czym $F(0) = 0$. Załóżmy, że obrazem dowolnej prostej przez przekształcenie F jest pewna prosta. Pokaż, że F jest liniowe.