Algebra liniowa 1R, Lista 4

1. Uzasadnij równości: $\det(M^{-1}NM) = \det(N)$, $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$, $\mathrm{tr}(M+N) = \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N)$, $\mathrm{tr}(M^{-1}NM) = \mathrm{tr}(N)$ (M, N, P są macierzami, $t \in \mathbf{R}$).
2. Dla jakich wartości parametru c macierz $\begin{pmatrix} 2 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$ ma (a) zero, (b) jedną, (c) dwie wartości własne.
3. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy
   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
4. Policz M^{-1} dla następujących macierzy M: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

---

5. Rozwiąż podane równania macierzowe posługując się macierzami odwrotnymi:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Sprawdź, że jedyną wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ jest 5. To samo zrób dla macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że jedna z tych macierzy diagonalizuje się, a druga nie.
7. Przedstaw macierz $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną. Zastosuj tę postać do obliczenia 6-tej potęgi macierzy M.
8. Znajdź macierz przekształcenia liniowego, dla którego $\binom{1}{0}$ jest wektorem własnym o wartości własnej $-\frac{1}{2}$, zaś $\binom{1}{1}$ jest wektorem własnym o wartości własnej 1.
9. Podaj przykład liniowego przekształcenia płaszczyzny, które zachowuje pole, zmienia orientację i ma wartość własną π.
10. Które z poniższych przekształceń diagonalizują się? Dla tych które diagonalizują się, znajdź wartości własne oraz bazę wektorów własnych. (Wsk.: Rozwiązuj to zadanie geometrycznie, bez odwoływania się do macierzy)
    (a) R_θ, (b) S_ℓ (ℓ – pewna prosta przechodząca przez O), (c) J_r, (d) P_U.
11. Napisz warunek na liczby a, b, c, d gwarantujący, że macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ma dwie różne wartości własne.
12. Niech $A = PMP^{-1}$. Uzasadnij, że wielomiany charakterystyczne macierzy A oraz M są równe (wsk.: można to zrobić odwołując się do wzorów z ćwiczenia 1). Wywnioskuj, że jeśli macierz M ma dwie różne wartości własne λ, μ, to $\det(M) = \lambda\mu$, $\mathrm{tr}(M) = \lambda + \mu$. Czy założenie $\lambda \neq \mu$ jest istotne?
13. Załóżmy, że przekształcenie liniowe E spełnia warunek $E \circ E = E$. Jakie wartości własne może mieć to przekształcenie? Czy koniecznie musi być przekształceniem zerowym lub identycznościowym?
14. Uzasadnij, że jeśli $A = PDP^{-1}$ (gdzie D jest diagonalna), to kolumny P są wektorami własnymi A.
15. Załóżmy, że wektory $U, W \in \mathbf{R}^2$ są lnz, zaś macierz A spełnia warunki $AU = 5U + 4W$, $AW = 3U + 2W$. Udowodnij, że istnieje odwracalna macierz P, taka że $A = P\binom{5\,3}{4\,2}P^{-1}$. Uogólnij.

---

16. Załóżmy, że $\det(F - x \cdot Id)$ ma podwójny pierwiastek λ, mimo że F nie jest jednokładnością. Udowodnij, że istnieją liniowo niezależne wektory U, W, takie że $F(U) = \lambda U$, $F(W) = U + \lambda W$. Czy macierz F diagonalizuje się? Jeśli nie, to czy potrafisz wskazać dla niej jakiś substytut diagonalizacji? (Wsk. zad. 15)
17. Udowodnij prawdziwość zdania $(\forall A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}))((\exists \lambda, \mu \in \mathbf{R})(\exists P \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}))(A = P\binom{\lambda\,0}{0\,\mu}P^{-1}) \iff ((\exists \lambda \in \mathbf{R})(A = \binom{\lambda\,0}{0\,\lambda})) \vee (\exists a, b \in \mathbf{R})(a \neq b \wedge \det(A - aI) = 0 \wedge \det(A - bI) = 0)))$.
18. Niech $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, zaś U niech będzie dowolnym wektorem. Zbadaj jak szybko rośnie długość wektora $M^n U$ gdy n dąży do nieskończoności. (Uzasadnij, że istnieje stała C zależna (jak?) od wektora U, taka że granica $\lim_{n\to+\infty} \frac{\|M^n U\|}{C^n}$ jest liczbą dodatnią.)
19. Przekształcenie liniowe F ma macierz $\binom{4\,3}{1\,2}$. Wyznacz macierz opisującą działanie tego przekształcenia we współrzędnych związanych z bazą $\left(\binom{2}{1}, \binom{5}{2}\right)$.
20. Niech F będzie liniowym przekształceniem płaszczyzny, takim że $\det F = 2$. Udowodnij, że istnieje wektor $U \in \mathbf{R}^2$, taki że $\|U\| = 1$, $\|F^{20}(U)\| > 1000$.