Algebra liniowa 1R, Lista $5\frac{1}{2}$

1. Niech $A = \begin{pmatrix} 100 & \frac{401}{200} \\ 50 & 1 \end{pmatrix}$. Udowodnij, że dla dowolnego $X \in \mathbf{R}^2$

$$\lim_{n\to+\infty} \det(A^n X, A^{n+1} X) = 0.$$

2. Znajdź równania obrazu i przeciwobrazu prostej $x + 3y = 2$ przez przekształcenie o macierzy $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Niech E będzie krzywą opisaną równaniem $3x^2+2xy+3y^2 = 1$. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   Wyznacz:
   a) Równanie obrazu krzywej E przez przekształcenie F_A.
   b) Równanie przeciwobrazu krzywej E przez przekształcenie F_A.
   c) Pole obszaru ograniczonego krzywą E.

4. Prostokątny układ współrzędnych (x', y') ma początek O' w punkcie $\binom{2}{3}$, a jego oś $O'X'$ ma (w standardowych współrzędnych) równanie $2x - y = 1$. Dodatkowo wiadomo, że układ jest dodatnio zorientowany. Wyznacz jawnymi wzorami:
   a) współrzędne (x, y) w terminach współrzędnych (x', y');
   b) współrzędne (x', y') w terminach współrzędnych (x, y).

5. Prostokątny układ współrzędnych (x', y') na płaszczyźnie spełnia warunki:
   a) jego początkiem jest punkt $\binom{2}{-3}$;
   b) punkt $\binom{1}{4}$ leży na dodatniej półosi $O'X'$;
   c) punkt $\binom{16}{3}$ leży na ujemnej półosi $O'Y'$.
   Wyraź współrzędne (x', y') przez współrzędne (x, y).

6. Załóżmy, że liniowe $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ spełnia warunek $F[\mathbf{Z}^2] = \mathbf{Z}^2$ (obrazem zbioru punktów o współrzędnych całkowitych jest tenże sam zbiór).
   a) Udowodnij, że F zachowuje pola figur.
   b) Uzasadnij, że F nie musi być izometrią.