

Powierzchnie Riemanna. Lista 0

Ta lista dotyczy analizy zespolonej i jest po części przypomnieniowa.

1. Niech $f \in \mathcal{O}(U)$ będzie funkcją holomorficzną na otwartym $U \subseteq \mathbf{C}$.
 - a) Uzasadnij, że zbiór $f[U]$ jest otwarty.
 - b) Uzasadnij, że jeśli f jest różnowartościowa, to $f^{-1}: f[U] \rightarrow U$ też jest holomorficzną.

Sferę Riemanna $\overline{\mathbf{C}}$ definiujemy jako jednopunktowe uzwarcenie $\mathbf{C}$: $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. (Przykładowa baza otoczeń punktu ∞ : $(\mathbf{C} \setminus \overline{B}(0, n) \cup \{\infty\} \mid n = 1, 2, \dots)$.)

Funkcję zespoloną f określoną na otwartym podzbiorniku $U \subseteq \overline{\mathbf{C}}$ do którego należy ∞ nazywamy holomorficzną, jeśli jest holomorficzną w każdym punkcie $U \cap \mathbf{C}$ oraz jeśli $z \mapsto f(1/z)$ jest holomorficzną w pewnym otoczeniu zera ($1/0 = \infty$).

Odwzorowanie $f: U \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ określone na otwartym podzbiorniku $U \subseteq \overline{\mathbf{C}}$ nazywamy holomorficznym, jeśli jest funkcją holomorficzną w każdym punkcie $U \cap f^{-1}[\mathbf{C}]$ oraz jeśli $z \mapsto 1/f(z)$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu każdego punktu $f^{-1}(\infty)$ (gdzie $1/\infty = 0$).

2. Uzasadnij, że każda holomorficzna funkcja $f: \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}$ jest stała. Podaj przykłady niestałych holomorficzych $f: \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$.
3. Uzasadnij, że jeśli $f: U \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ jest niestałą funkcją holomorficzną określoną na obszarze $U \subseteq \mathbf{C}$, to obcięcie f do $U \cap f^{-1}[\mathbf{C}]$ jest funkcją meromorficzną.
4. Uzasadnij, że jeśli $f: \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ jest holomorficzną bijekcją, to f^{-1} jest funkcją holomorficzną.

O bijekcji holomorficzej w obie strony mówimy, że jest *biholomorfizmem*.

Biholomorfizmy $\mathbf{D}$.

Niech $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.

5. (Lemat Schwarza) Jeśli holomorficzna $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ spełnia $f(0) = 0$, to
 - a) $|f(z)| \leq |z|$;
 - b) $|f'(0)| \leq 1$;
 - c) jeżeli $|f'(0)| = 1$, to $f(z) = az$ dla pewnego $a \in \mathbf{C}$, $|a| = 1$.
6. Napisz jawnym (homograficznym) wzorem biholomorfizm $g: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ przekształcający zadaną liczbę $w \in \mathbf{D}$ w 0.
7. Udowodnij, że każdy biholomorfizm $\mathbf{D}$ jest zadany wzorem homograficznym; opisz ten wzór możliwie jawnie. (Wsk. rozpatrz złożenie biholomorfizmu f z odwzorowaniem z poprzedniego zadania – dla $w = f(0)$.)

Biholomorfizmy $\overline{\mathbf{C}}$.

8. Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ będzie odwracalną macierzą zespoloną 2×2 ($A \in \text{GL}(2, \mathbf{C})$), zaś $z \in \mathbf{C}$. Określmy $A.z := \frac{az+b}{cz+d}$.
 - a) Zinterpretuj odwzorowanie $z \mapsto A.z$ jako biholomorfizm $\overline{\mathbf{C}}$.
 - b) Uzasadnij, że w ten sposób określone zostało działanie grupy $\text{GL}(2, \mathbf{C})$ na $\overline{\mathbf{C}}$.Oznaczmy przez ψ_A biholomorfizm $\overline{\mathbf{C}}$ rozszerzający odwzorowanie $z \mapsto A.z$.
9. Uzasadnij, że dla dowolnych trzech $z, u, w \in \overline{\mathbf{C}}$ istnieje $A \in \text{GL}(2, \mathbf{C})$, taka że $A.z = 0$, $A.u = 1$ oraz $A.w = \infty$.
10. Niech $f: \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ będzie biholomorfizmem.
 - a) Uzasadnij, że istnieje $A \in \text{GL}(2, \mathbf{C})$, taka że $g = \psi_A \circ f$ spełnia $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(\infty) = \infty$.
 - b) Uzasadnij, że funkcja $\mathbf{C} \ni z \mapsto g(z)/z$ jest (po stosownym uzupełnieniu w zerze) holomorficzną i ograniczoną.
 - c) Uzasadnij, że f jest postaci ψ_B dla pewnego $B \in \text{GL}(2, \mathbf{C})$.

Biholomorfizmy $\mathbf{C}$.

11. Uzasadnij, że każdy biholomorfizm $\mathbf{C}$ rozszerza się do biholomorfizmu $\overline{\mathbf{C}}$. Wywnioskuj stąd, że jest on postaci $z \mapsto az + b$ dla pewnych $b \in \mathbf{C}$, $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.