

Powierzchnie Riemanna. Lista 1

1. Przy użyciu zespolonych kartek, kleju i nożyczek sporządź wygodną dziedzinę dla funkcji $\sqrt{z(z^2 - 1)(z^2 - 4)}$.
2. Przy użyciu zespolonych kartek, kleju i nożyczek sporządź wygodną dziedzinę dla funkcji $\sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - 4)(z^2 + 9)}$.
3. Niech $p(x, y) \in \mathbf{C}[x, y]$ będzie nierozkładalny. Udowodnij, że skończony jest zbiór

$$\{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid p(x, y) = p_y(x, y) = 0\}.$$

4. Sprawdź, czy podzbiór $\mathbf{C}^2$ opisany równaniem $y^2 = \sin x$ jest powierzchnią Riemanna.
5. Niech $p(x, y, z) \in \mathbf{C}[x, y, z]$ będzie wielomianem jednorodnym. Załóżmy, że układ $p_x = p_y = p_z = 0$ ma jedyne rozwiązanie – punkt $(0, 0, 0)$. Udowodnij, że wtedy równanie $p = 0$ definiuje powierzchnię Riemanna w $\mathbf{CP}^2$.
6. Udowodnij, że powierzchnia Riemanna w $\mathbf{CP}^2$ zadana równaniem $y^2 = xz$ jest izomorficzna (tj. biholomorficzna) ze sferą Riemanna $\overline{\mathbf{C}}$.
7. Na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ dana jest pewna skończona rodzina rozłącznych trójkątów. Zbiór wszystkich boków tych trójkątów podzielono na pary, przy czym okazało się, że jeśli boki są w parze, to są tej samej długości. Dla każdej z par boków $\{e, e'\}$ tego podziału wybrano zachowującą orientację izometrię $F_{e, e'}$ przekształcającą e na e' ; okazało się, że obraz przez $F_{e, e'}$ trójkąta, którego bokiem jest e , jest rozłączny z wnętrzem trójkąta, którego bokiem jest e' . Rozpatrzmy na sumie danej rodziny trójkątów relację następującą: punkty p, q są w relacji, jeśli istnieje para boków $\{e, e'\}$ naszego podziału, taka że $p \in e, q \in e'$ oraz $F_{e, e'}(p) = q$.
 - a) Uzasadnij, że Σ – iloraz sumy danej rodziny trójkątów przez tranzytywne domknięcie opisanej relacji – jest zwartą przestrzenią Hausdorffa lokalnie homeomorficzną z $\mathbf{R}^2$.
 - b) Zadań na Σ strukturę powierzchni Riemanna tak, by włożenie wnętrza każdego trójkąta naszej rodziny w Σ było holomorficzne.
8. Niech $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Wprowadźmy na (otwartym jednostkowym) dysku $\mathbf{D}$ relację równoważności: $z \sim w \iff (\exists k \in \mathbf{Z})(z = A^k.w)$. Wprowadź na ilorazie $\mathbf{D}/\sim$ strukturę powierzchni Riemanna.
9. Sprawdź szczegóły konstrukcji przestrzeni kielków $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. Przekonaj się, że
 - a) zbiory $O(U, f) = \{\underline{f}_z \mid z \in U\}$ tworzą bazę pewnej topologii;
 - b) ta topologia jest Hausdorffa;
 - c) rzut $O(U, f) \ni \underline{f}_z \mapsto z \in U$ jest homeomorfizmem;
 - d) takie rzuty zadają na $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ strukturę powierzchni Riemanna;
 - e) funkcja $\mathcal{O}_{\mathbf{C}} \ni \underline{f}_z \mapsto f(z) \in \mathbf{C}$ jest holomorficzna.
10. (Zrób to zadanie, jeśli umiesz trochę topologii algebraicznej.) Niech Λ i Λ' będą dwoma kratami w $\mathbf{C}$. Załóżmy, że torusy $\mathbf{C}/\Lambda$ i $\mathbf{C}/\Lambda'$ są biholomorficzne. Udowodnij, że kraty Λ i Λ' są homotetyczne, tzn. że istnieje niezerowa $\lambda \in \mathbf{C}$, taka że $\Lambda' = \lambda \cdot \Lambda$.

11. (Zrób to zadanie, jeśli zrobiłeś poprzednie i nie potrafisz się zatrzymać.) Niech M będzie ilorazem $\widetilde{M} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \geq 1, -1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1/2, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ przez relację sklejającą symetryczne względem osi urojonej punkty brzegu tego zbioru.
- a) Udowodnij, że każda krata Λ w $\mathbf{C}$ jest homotetyczna z kratą postaci $\Lambda_\tau = \mathbf{Z} \cdot 1 + \mathbf{Z} \cdot \tau$ dla pewnego $\tau \in \widetilde{M}$.
 - b) Udowodnij, że jeśli dla $\tau, \tau' \in \widetilde{M}$ kraty $\Lambda_\tau, \Lambda_{\tau'}$ są homotetyczne, to τ i τ' definiują ten sam punkt w M .
 - c) Na jednopunktowym uzwarceniu $\overline{M}$ przestrzeni M spróbuj zadać strukturę powierzchni Riemanna, tak by włożenie $\operatorname{int}(\widetilde{M}) \rightarrow \overline{M}$ było holomorficzne.