

Powierzchnie Riemanna. Lista 2

1. Udowodnij, że wielomian $p(x, y) \in \mathbf{C}[x, y]$ nie ma w $\mathbf{C}^2$ izolowanych zer.
2. Niech $\pi: E \rightarrow B$ będzie nakryciem. Załóżmy, że B jest drogowo spójna. Udowodnij, że krotność nakrycia π jest dobrze określona, tzn. że dla dowolnych $b, b' \in B$ przeciwobrazy $\pi^{-1}(b)$, $\pi^{-1}(b')$ są równoliczne.
3. Niech $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ będzie niestałym holomorficznym odwzorowaniem spójnych powierzchni Riemanna; niech $f(p) = q$. Udowodnij, że można dobrać mapy: ϕ na otoczeniu p i ψ na otoczeniu q , tak by $\phi(p) = 0$, $\psi(q) = 0$ oraz $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: z \mapsto z^k$ dla pewnego całkowitego dodatniego k . Uzasadnij, że choć mapy spełniające żądany warunek można wybierać różnie, to otrzymany wykładnik k zawsze wychodzi taki sam. (Nazywamy go *krotnością* f w punkcie p i oznaczamy k_p .)
4. Niech $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ będzie niestałym holomorficznym odwzorowaniem zwartych spójnych powierzchni Riemanna.
 - a) Udowodnij, że punktów Σ_1 w których f ma krotność > 1 jest skończenie wiele. (Takie punkty nazywamy punktami krytycznymi/rozgałęzienia/ramifikacji.)
 - b) Niech C będzie zbiorem punktów krytycznych f . Udowodnij, że ograniczenie $f: \Sigma_1 \setminus f^{-1}(f(C)) \rightarrow \Sigma_2 \setminus f(C)$ jest nakryciem.
 - c) Udowodnij, że dla każdego $q \in \Sigma_2$ suma $\sum_{p \in f^{-1}(q)} k_p$ wychodzi taka sama. (Nazywamy ją *stopniem* odwzorowania f .)
5. Załóżmy, że f jest zwartą powierzchnią Riemanna, zaś f funkcją meromorficzną na Σ która ma tylko jeden biegun, i to w dodatku biegun rzędu 1. Udowodnij, że Σ jest biholomorficzna z $\overline{\mathbf{C}}$.
6. Niech $B^* = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. Niech $\pi: E \rightarrow B^*$ będzie k -krotnym nakryciem. Załóżmy, że E jest spójna. Udowodnij, że wtedy istnieje homeomorfizm $f: E \rightarrow B^*$, taki że dla każdego $e \in E$ zachodzi $\pi(e) = f(e)^k$.
7. Udowodnij, że jeśli $z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n = 0$, to $|z| \leq 2 \max_k |b_k|^{1/k}$. Alternatywnie, znajdź jakieś inne szacowanie pierwiastka w terminach współczynników pozwalające osiągnąć następujący wniosek: jeśli z oraz wszystkie b_k są funkcjami holomorficznymi parametru $w \in B(0, \epsilon) \setminus \{0\}$, przy czym każda z funkcji b_k ma w zerze biegun lub przedłuża się tam holomorficznie, to również funkcja z ma w zerze biegun lub przedłuża się tam holomorficznie.
8. Przeanalizuj szczegółowo strukturę powierzchni Riemanna $\Sigma(p)$ wielomianu

$$p(x, y) = xy^2 - 2y - 2x^2 + 3x.$$

(Wyznacz zbiór $S \subset \overline{\mathbf{C}}$, opisz miejsca dodawania punktów i krotności rzutu $\pi: \Sigma(p) \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$ w dodanych punktach, zbadaj holomorficzność / rząd bieguna funkcji y w dodanych punktach.)

9. Niech $S \subset \overline{\mathbf{C}}$ będzie skończonym podzbiorem. Załóżmy, że $\pi: \text{Reg} \rightarrow \overline{\mathbf{C}} \setminus S$ jest nakryciem skończonej krotności. Skonstruuj zwartą powierzchnię Riemanna Σ i włożenie $\iota: \text{Reg} \rightarrow \Sigma$, tak by
 - a) zbiór $\Sigma \setminus \iota(\text{Reg})$ był skończony;
 - b) funkcja $\pi \circ \iota^{-1}$ rozszerzała się do holomorficznego odwzorowania $\Sigma \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$.