

Powierzchnie Riemanna. Lista 3

Σ to powierzchnia Riemanna – spójna, bez brzegu, niekoniecznie zamknięta.

1. (Rozkład jedynki - dla chętnych) Załóżmy, że zwarty podzbiór $K \subseteq \Sigma$ jest zawarty w sumie skończenie wielu zbiorów otwartych U_i . Pokaż, że istnieją funkcje $\chi_i \in C_c^\infty(U_i)$ których suma $\sum_i \chi_i$ jest równa 1 na całym K .
2. Sprawdź, że wzór $d(fdx + gdy) = (g_x - f_y)dx \wedge dy$ określa różniczkę 1-formy w sposób niezależny od wyboru mapowego układu współrzędnych.
3. Sprawdź, że jeśli $\alpha = fdx + gdy \in \Omega_c^1(\mathbf{R}^2)$, to

$$\int_{\mathbf{R}^2} d\alpha = 0; \quad \int_{\mathbf{R}_+^2} d\alpha = \int_{\mathbf{R} \times \{0\}} \alpha.$$

(Oznaczenie: $\mathbf{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq 0\}$.) Używając liniowości całki i rozkładu jedynki wywnioskuj stąd tw. Stokesa (dwuwymiarowe).

4. Wylicz $H^1(S^1 \times \mathbf{R})$.
5. Niech $\alpha \in \Omega^1(\Sigma)$ będzie zamknięta (tj. $d\alpha = 0$). Niech B będzie otwartym dyskiem w Σ , zaś D domkniętym dyskiem zawartym w B (np. $B = \varphi^{-1}(B(0, 1))$, $D = \varphi^{-1}(D(0, 1/2))$ dla pewnej mapy φ). Uzasadnij, że istnieje funkcja $f \in C_c^\infty(B)$, taka że forma $\alpha - df$ jest zerowa na D .

Niech Σ_2 oznacza powierzchnię genusu 2 (precla z dwoma dziurami). Można ją wytworzyć biorąc dwa torusy (T_1, T_2) , wycinając z każdego z nich dziurę (mały domknięty dysk D_1, D_2), a następnie doklejając do nich cylinder $S^1 \times \mathbf{R}$ – jednym końcem do jednego, drugim do drugiego dziurawego torusa. Po doklejeniu cylinder ma wspólny otwarty annulus A_1 z dziurawym torusem $T_1 \setminus D_1$, oraz wspólny otwarty annulus A_2 (rozłączny z A_1) z dziurawym torusem $T_2 \setminus D_2$.

6. Postaw hipotezę: narysuj na Σ_2 cztery krzywe: γ_1, γ_2 (w T_1), γ_3, γ_4 (w T_2), tak by odwzorowanie

$$P: H^1(\Sigma_2) \ni [\alpha] \mapsto \left(\int_{\gamma_1} \alpha, \int_{\gamma_2} \alpha, \int_{\gamma_3} \alpha, \int_{\gamma_4} \alpha \right) \in \mathbf{R}^4$$

miało szanse być izomorfizmem.

7. Pokaż, że P jest epimorfizmem. (Wsk. weź formę typu “ $d\theta$ ” na T_1 , zastosuj do niej zadanie 5 i rozszerz zerem na Σ_2 .)
8. Pokaż, że P jest monomorfizmem. Niech $\alpha \in \Omega^1(\Sigma_2)$, $d\alpha = 0$.
 - a) odejmij od α formę df o nośniku w cylindrze, tak by $\beta := \alpha - df$ miała nośnik zawarty w sumie dziurawych torusów.
 - b) Przedłuż β (zerem) do pary form: $\beta_1 \in \Omega^1(T_1)$, $\beta_2 \in \Omega^1(T_2)$.
 - c) Uzasadnij, że $\beta_1 = dg_1$, $\beta_2 = dg_2$ dla odpowiednich funkcji g_1, g_2 .
 - d) Używając g_1, g_2 zbuduj funkcję g na Σ_2 , tak by $\beta = dg$.
9. Policz H^1 dla powierzchni genusu g (precla z g dziurami).

10. Udowodnij, że jeśli $0 \neq [\alpha] \in H^1(\Sigma)$, to istnieje w Σ pętla γ , taka że $\int_{\gamma} \alpha \neq 0$.
11. Niech $F: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ będzie holomorficznym odwzorowaniem powierzchni Riemanna (spójnych i zwartych).
 - a) Zdefiniuj odwzorowanie cofające formy: $F^*: \Omega^i(\Sigma') \rightarrow \Omega^i(\Sigma)$ (dla $i = 0, 1, 2$).
 - b) Sprawdź, że dla $\alpha \in \Omega^1(\Sigma')$ zachodzi $F^*(d\alpha) = d(F^*\alpha)$.
 - c) Uzasadnij, że F^* indukuje dobrze określone liniowe odwzorowanie na kohomologiach: $F^*: H^i(\Sigma') \rightarrow H^i(\Sigma)$.
 - d) Wiadomo, że odwzorowania $\int_{\Sigma}: H^2(\Sigma) \rightarrow \mathbf{R}$, $\int_{\Sigma'}: H^2(\Sigma') \rightarrow \mathbf{R}$ są izomorfizmami. Udowodnij że odwzorowanie $F^*: H^2(\Sigma') \rightarrow H^2(\Sigma)$, oglądane przez pryzmat tych izomorfizmów, jest mnożeniem przez stopień F .
12. Udowodnij, że $H^2(\mathbf{R}^2) = 0$.
13. Wylicz kohomologie $\mathbf{R}^2$ z usuniętą skończoną liczbą punktów.