

Powierzchnie Riemanna. Lista 4

Σ to powierzchnia Riemanna – spójna, bez brzegu, niekoniecznie zamknięta.

1. Udowodnij, że na $T_p\Sigma$ istnieje jedyna struktura zespolona $J: V \rightarrow V$, taka że: $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{C}$ jest holomorficzna w $p \iff df_p: (T_p\Sigma, J) \rightarrow \mathbf{C}$ jest $\mathbf{C}$ -liniowa.
(Wsk. zadaj J używając mapy; z jedyności wywnioskuj niezależność od wyboru mapy.)
2. Załóżmy, że na otoczeniu $p \in \Sigma$ mamy dwie różne mapy, zadające dwie różne lokalne współrzędne zespolone z, w .
 - a) Uzasadnij, że każde $\mathbf{C}$ -liniowe odwzorowanie $T_p\Sigma \rightarrow \mathbf{C}$ jest (zespoloną) skalarną krotnością dz .
 - b) Uzasadnij, że każde $\mathbf{C}$ -antyliniowe odwzorowanie $T_p\Sigma \rightarrow \mathbf{C}$ jest (zespoloną) skalarną krotnością $d\bar{z}$.
 - c) W szczególności $dw = a dz, d\bar{w} = b d\bar{z}$ dla pewnych zespolonych a, b . Opisz a i b w terminach (pochodnej) odwzorowania przejścia między mapami.
3. Sprawdź poprawność wzorów $d(a dz) = \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz, d(b d\bar{z}) = \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}$.
4. Zdefiniuj 1-formę meromorficzną i jej residuum. Uzasadnij, że całka z takiej formy po brzegu ∂S zwartej podpowierzchni $S \subseteq \Sigma$ jest równa sumie jej residuów leżących w S . (Zakładamy, że ∂S omija bieguny formy).
5. Skoro residuum formy meromorficznej jest dobrze określoną liczbą zespoloną, to residuum funkcji meromorficznej na powierzchni Σ powinno być dobrze określonym zespolonym wektorem stycznym. Spróbuj nadać sens temu stwierdzeniu oraz jakoś je uzasadnić.
6. Niech $S \subseteq \Sigma$ będzie zwartą podpowierzchnią o brzegu ∂S , zaś φ gładką rzeczywistą funkcją na Σ , która jest zerowa na ∂S oraz dodatnia na wewnątrz S . Wykaż, że

$$i \int_{\partial S} \partial \varphi \geq 0.$$

7. Sprawdź, że na przestrzeni zespolonych form $\Omega_c^{1,0}(\Sigma)$ wzór $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_{\Sigma} i \alpha \wedge \bar{\beta}$ zadaje hermitowski iloczyn skalarny.
8. Rzeczywista 1-forma rozkłada się jednoznacznie na sumę form typu $(1,0)$ i $(0,1)$: $\alpha = \alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}$. Sprawdź, że na przestrzeni rzeczywistych form $\Omega_c^1(\Sigma)$ wzór

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \operatorname{Re} \left(2i \int_{\Sigma} \alpha^{1,0} \wedge \beta^{0,1} \right)$$

zadaje rzeczywisty iloczyn skalarny. Jak się ma $\|\alpha\|$ do $\|\alpha^{1,0}\|$?

9. Udowodnij dla $f, g \in C_c^\infty(\Sigma, \mathbf{R})$ wzór $\int_{\Sigma} f \Delta g = \langle df, dg \rangle = \int_{\Sigma} g \Delta f$.
10. Niech $\alpha, \beta \in \Omega^1(\Sigma)$ będą formami rzeczywistymi. Udowodnij nierówność Schwarz'a:

$$\int_{\Sigma} |\alpha \wedge \beta| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|.$$

(Lokalnie, we współrzędnych $z = x + iy$, określamy $|f dx dy| = |f| dx dy$.)