

Powierzchnie Riemanna. Lista 5

Σ to powierzchnia Riemanna – spójna, bez brzegu, zamknięta.

Dywizor na Σ to formalna skończona kombinacja liniowa punktów Σ z całkowitymi współczynnikami: $D = \sum_i n_i p_i$, $n_i \in \mathbf{Z}$, $p_i \in \Sigma$.

Stopień dywizora D to $\deg D = \sum_i n_i$.

Dywizor jest *efektywny*, jeśli wszystkie n_i są nieujemne. (Piszemy też wtedy: $D \geq 0$.)

Dywizor funkcji meromorficznej $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$ to $(f) := \sum_{p \in \Sigma} \text{ord}_p(f) \cdot p$; podobnie dla formy meromorficznej ω określamy $(\omega) := \sum_{p \in \Sigma} \text{ord}_p(\omega) \cdot p$ (przyjmujemy, że w lokalnych współrzędnych $\text{ord}_p(fdz) := \text{ord}_p(f)$).

(Pojęcie dywizora funkcji/formy nie ma sensu dla funkcji/formy zerowej; poniżej wszędzie po cichu zakładamy niezerowość.)

1. Udowodnij, że stopień dywizora dowolnej funkcji meromorficznej jest równy 0.
 2. Czy każdy dywizor stopnia 0 jest dywizorem pewnej funkcji meromorficznej?
 3. Dywizory można dodawać. Uzasadnij wzory: $(fg) = (f) + (g)$, $(f\omega) = (f) + (\omega)$.
 4. Uzasadnij, że dla dowolnej pary form meromorficznych ω, η na Σ zachodzi $\deg(\omega) = \deg(\eta)$. Ile jest równy ten stopień dla $\Sigma = \overline{\mathbf{C}}$?
Niech $H^0(D) = \{f \in \mathcal{M}(\Sigma) \mid (f) + D \geq 0\}$, $h^0(D) = \dim H^0(D)$.
Niech $H^1(D) = \{\omega \text{ meromorficzna 1-forma na } \Sigma \mid (\omega) - D \geq 0\}$, $h^1(D) = \dim H^1(D)$.
 5. Pokaż, że jeśli $\deg D < 0$, to $h^0(D) = 0$.
 6. Niech $p \in \Sigma$. Udowodnij, że $h^0(np) > 1$ dla dostatecznie dużych n .
 7. Niech ω będzie meromorficzną formą na Σ ; niech $K = (\omega)$. Udowodnij, że odwzorowanie $f \mapsto f\omega$ zadaje izomorfizm $H^0(K - D) \rightarrow H^1(D)$.
 8. Wykaż, że jeśli $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$, a $D' = D + (f)$, to $h^0(D') = h^0(D)$, $h^1(D') = h^1(D)$.
-
9. Niech $x_1, \dots, x_n$ będą n różnymi punktami Σ , zaś $w_1, \dots, w_n$ różnymi liczbami zespolonymi. Udowodnij, że istnieje $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$, taka że $f(x_1) = w_1, \dots, f(x_n) = w_n$.
 10. Dla efektywnego D udowodnij tw. Riemanna-Rocha: $h^0(D) - h^1(D) = \deg D - g + 1$. (Wsk. naśladować dowód pokazany na wykładzie.)
 11. Udowodnij wzór Riemanna-Rocha dla dowolnego dywizora według poniższego planu.
 - a) Z poprzedniego zadania znamy ten wzór dla dywizorów efektywnych.
 - b) Uzasadnij, że jeśli nierówność R-R ($h^0(D) - h^1(D) \geq \deg D - g + 1$) jest prawdziwa dla D , to jest też prawdziwa dla $D - p$. (Gdyby tak nie było, to istniałyby $f \in H^0(D) \setminus H^0(D - p)$, $\omega \in H^1(D - p) \setminus H^1(D)$; uzasadnij, że wtedy $f\omega$ byłaby formą z jednym biegunem prostym, a to przeczyłoby zadaniu 4 z listy 4.)
 - c) Tak więc każdy dywizor spełnia nierówność R-R.
 - d) Niech $\Sigma \neq \overline{\mathbf{C}}$; wtedy istnieje na Σ holomorficzna forma ω , a $K = (\omega)$ jest efektywny. Używając wzoru R-R dla $D = K$ wyznacz $\deg K$. Dla $\Sigma = \overline{\mathbf{C}}$ użyj jawnie napisanej meromorficznej ω i też wyznacz $\deg K$ dla $K = (\omega)$.
 - e) Zastosuj nierówność R-R do D i do $K - D$ by uzasadnić wzór R-R dla D .
 12. (dla umiejących się obchodzić z potokami pól wektorowych)
Niech $\alpha \in H^{1,0}(\Sigma)$ będzie formą holomorficzną która nie zeruje się w żadnym punkcie.

- a) Niech α zapisuje się lokalnie w mapach jako $f dz$. Uzasadnij, że $\frac{1}{f} \partial_z$ określa poprawnie (w tychże mapach) nieznikające w żadnym punkcie holomorficzne pole wektorowe V na Σ . (Jeśli $z = x + iy$, to $\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i \partial_y)$.)
- b) Niech $V = X - iY$, gdzie X i Y są rzeczywistymi polami wektorowymi na Σ . Sprawdź, że potoki pól X i Y komutują.
- c) Potok pola V definiujemy wzorem $\varphi_V^{s+it} = \varphi_X^s \circ \varphi_Y^t$. Sprawdź, że odwzorowanie

$$\mathbf{C} \times \Sigma \ni (z, p) \mapsto \varphi_V^z(p) \in \Sigma$$

zadaje holomorficzne działanie $\mathbf{C}$ (jako grupy addytywnej) na Σ .

- c) Uzasadnij, że orbity tego działania są otwarte – i dalej, że ma ono jedną orbitę.
- d) Uzasadnij, że stabilizator punktu jest dyskretną (i koźwartą) podgrupą $\Lambda < \mathbf{C}$.
- e) Udowodnij, że Σ jest biholomorficzną z torusem $\mathbf{C}/\Lambda$.