

Powierzchnie Riemanna. Lista 6

Σ to powierzchnia Riemanna – spójna, bez brzegu, niekoniecznie zamknięta.

1*. Udowodnij wzór:

$$\int_U (f\Delta g - g\Delta f) dA = \int_{\partial U} (gD_n f - fD_n g) d\ell.$$

Wyjaśnij notację i przedyskutuj założenia.

2. Na zespolonej kartce narysuj zwyczajną zamkniętą krzywą. Wewnątrz obszaru przez nią ograniczonego narysuj kolejną zwyczajną zamkniętą krzywą. Czym (biholomorficznie) jest nakrycie uniwersalne obszaru zawartego między tymi krzywymi?
3. Używając transformaty Cayley’a $\mathbf{D} \ni w \mapsto i\frac{1-w}{1+w} \in \mathbf{H}$ i znajomości $\text{Aut}(\mathbf{D})$ (albo tychże nie używając) udowodnij, że $\text{Aut}(\mathbf{H}) \simeq PSL(2, \mathbf{R}) = SL(2, \mathbf{R})/\{\pm 1\}$. (Macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ działa na $\mathbf{H}$ wedle wzoru $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.)
4. Sklasyfikuj, z dokładnością do sprzężenia, nieskończone cykliczne podgrupy $SL(2, \mathbf{R})$ które działają na $\mathbf{H}$ bez punktów stałych. (Wsk. rozważ rzeczywistą postać Jordana generatora takiej podgrupy.)
5. Napisz jawnym wzorem nakrycie uniwersalne $\mathbf{H} \rightarrow A(r, R)$ dla pierścienia $A(r, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z| < R\}$.
6. Sklasyfikuj, z dokładnością do biholomorfizmu, powierzchnie Riemanna z grupą podstawową $\mathbf{Z}$. (Wsk. zuniformizuj nakrycie uniwersalne, po czym użyj zadania 4.)
7. Uzasadnij, że nie ma niestałych holomorficznych odwzorowań $\overline{\mathbf{C}} \rightarrow \Sigma$ dla $\Sigma \neq \overline{\mathbf{C}}$. (Wsk. takie odwzorowanie podnosiłoby się do odwzorowania $\overline{\mathbf{C}} \rightarrow \tilde{\Sigma}$, które z kolei musiałyby być stałe.) Wywnioskuj stąd tw. Lürotha: jeśli $\mathbf{C} \subset K \subset \mathbf{C}(z)$ jest rozszerzeniem ciał, to $K \simeq \mathbf{C}(z)$.
8. Dla K – skończenie generowanego rozszerzenia $\mathbf{C}$ o stopniu przestępności 1 – określ na $\text{Val}(K)$ strukturę powierzchni Riemanna (tak, by dla $K = \mathcal{M}(\Sigma)$ odzyskać Σ).
9. Udowodnij *słabe twierdzenie o aproksymacji*: Niech $D = \sum_i n_i p_i$ będzie dywizorem na zwartej powierzchni Riemanna Σ ; niech $f_i \in \mathcal{M}(\Sigma)$; wtedy istnieje $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$, taka że $\text{ord}_{p_i}(f - f_i) \geq n_i$ dla każdego i .
10. Udowodnij *silne twierdzenie o aproksymacji*: Niech $D = \sum_{i=1}^d n_i p_i$ będzie dywizorem na zwartej powierzchni Riemanna Σ , zaś p_0 punktem spoza nośnika tego dywizora; niech $f_i \in \mathcal{M}(\Sigma)$; wtedy istnieje $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$, taka że $\text{ord}_{p_i}(f - f_i) \geq n_i$ dla każdego i , oraz $\text{ord}_p(f) \geq 0$ dla $p \neq p_0, p_1, p_2, \dots, p_d$.