

## Powierzchnie Riemanna. Lista 7

$\Sigma$  to powierzchnia Riemanna – spójna, zwarta, bez brzegu.

1. Uzasadnij, że wiązka  $L(D)$  z cięciem  $s_D$  nie zależą (ze stosowną dokładnością) od wyborów dokonywanych przy ich konstruowaniu.
2. Uzasadnij, że zbiór klas izomorfizmu liniowych wiązek holomorficznych nad  $\Sigma$  tworzy grupę (oznaczaną  $\text{Pic}(\Sigma)$ ) – z działaniem  $\otimes$  i wiązką dualną jako elementem odwrotnym. Sprawdź, że odwzorowanie  $D \mapsto L(D)$  indukuje monomorfizm  $\text{Cl}(\Sigma) \rightarrow \text{Pic}(\Sigma)$ .
3. Opisz strukturę holomorficznej wiązki liniowej na  $T^*\Sigma'$ .
4. Udowodnij, że każde holomorficzne cięcie wiązki  $\mathcal{O}(n)$  nad  $\overline{\mathbf{C}}$  pochodzi od wielomianu stopnia  $n$ .
5. Uzasadnij, że jeśli  $\Sigma$  ma genus 1, to odwzorowanie  $\Sigma \ni p \mapsto \mu(p - p_0) \in \mathbf{C}/\Lambda$  jest biholomorfizmem ( $p_0 \in \Sigma$  to dowolnie ustalony punkt).

6. (Riemann–Hurwitz) Niech  $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  będzie niestałym holomorficznym odwzorowaniem. Dla  $p \in \Sigma_1$  określamy krotność  $k_p$  odwzorowania  $f$  w punkcie  $p$  (zob. zad. 3 z listy 2). *Dywizor rozgałęzienia (dyferenta)* odwzorowania  $f$  to  $R_f := \sum_{p \in \Sigma_1} (k_p - 1) \cdot p$ . Udowodnij wzór

$$2 - 2g_1 = \deg(f) \cdot (2 - 2g_2) + \deg(R_f),$$

w którym  $g_i$  to genus  $\Sigma_i$  – na dwa sposoby.

- a) Użyj odpowiednio dobranej triangulacji  $\Sigma_2$ ; cofnij ją przez  $f$  do triangulacji  $\Sigma_2$  i porównaj dla nich wielkości  $V - E + T$  ( $V$  – liczba wierzchołków,  $E$  – liczba krawędzi,  $T$  – liczba trójkątów).
- b) Rozważ niestałą formę meromorficzną  $\omega$  na  $\Sigma_2$  oraz jej cofnięcie  $f^*\omega$  na  $\Sigma_1$ . Przeanalizuj relację między dywizorami tych form; porównaj stopnie tych dywizorów.

7. Udowodnij, że usnapienie snopa jest bez sensu – wychodzi “ten sam” snop.
8. Niech  $\mathcal{V} = \{V_j \mid j \in J\}$  oraz  $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$  będą otwartymi pokryciami  $\Sigma$ , zaś  $\mathcal{F}$  snopem nad  $\Sigma$ . Załóżmy, że  $\mathcal{V}$  jest drobniejsze, tzn. że istnieje *odwzorowanie wpisujące*  $\tau: J \rightarrow I$  – takie, że  $V_j \subseteq U_{\tau(j)}$  dla każdego  $j \in J$ . Odwzorowanie  $\tau$  indukuje  $\tau^*: H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ .
  - a) Udowodnij, że dwa odwzorowania wpisujące indukują to samo odwzorowanie na kohomologiach.
  - b) Udowodnij, że  $\tau^*: H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  jest różnowartościowe.
9. Sprawdź, że krótki ciąg dokładny snopów  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  indukuje długi ciąg dokładny kohomologii:

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{G}) \rightarrow H^0(\mathcal{H}) \rightarrow H^1(\mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{G}) \rightarrow H^1(\mathcal{H}) \rightarrow H^2(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

10. Uzasadnij, że  $H^2(\Sigma, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ . (Możesz do tego użyć pokryć gwiazdami drobnych triangulacji.)
11. Ciąg snopów  $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0$  indukuje w szczególności homomorfizm  $H^1(\mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(\mathbf{Z})$ , czyli  $\text{Pic}(\Sigma) \rightarrow \mathbf{Z}$ . Udowodnij, że obrazem klasy wiązki  $L(D)$  jest liczba  $\deg(D)$ .