

ZADANIA Z TOPOLOGII RÓŻNICZKOWEJ

LISTA 3. Topologia Whitneya

Ćwiczenia.

1. Uzasadnij, że topologia silna na przestrzeni $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ciągłych odwzorowań $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ jest silniejsza, i to istotnie, niż topologia zwarto-otwarta na tej przestrzeni.
2. Uzasadnij, że dla gładkich rozmaitości X, Y i dla $r < k$ C^r -topologia Whitneya na $C^\infty(X, Y)$ jest słabsza, i to istotnie, niż C^k -topologia Whitneya.
3. Pokaż, że gdy $\mathcal{X}$ jest przestrzenią lokalnie zwartą zaś $\mathcal{Y}$ metryczną, to topologia zwarto-otwarta na $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ pokrywa się z topologią zbieżności jednostajnej po zbiorach zwartych (tzn. domknięcie w tej topologii jest scharakteryzowane przez zbieżność jednostajną po zbiorach zwartych).
4. Pokaż, że gdy $\mathcal{X}$ jest przestrzenią parazwartą, zaś $\mathcal{Y}$ metryczną, to silna topologia na przestrzeni $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ jest równoważnie zadana przez lokalne bazy otoczeń postaci

$$\mathcal{U}(f, \varepsilon) = \{g \in C(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \forall x \in \mathcal{X} \ d_{\mathcal{Y}}(f(x), g(x)) < \varepsilon(x)\},$$

gdzie $d_{\mathcal{Y}}$ to metryka na $\mathcal{Y}$, zaś $\varepsilon : \mathcal{X} \rightarrow R_+$ jest dowolną funkcją ciągłą.

5. Uzasadnij, że C^r -topologia Whitneya, dla $r \leq \infty$, spełnia własność Hausdorffa.

Zadania.

6. Znajdź zupełną metrykę na przestrzeni $C^\infty([0, 1], R)$ zgodną z C^∞ -topologią Whitneya (wcześniej, z C^r -topologią dla $r < \infty$).
7. Pokaż, że odwzorowanie $C^\infty(X, R) \times R \rightarrow C^\infty(X, R)$ określone przez $(f, c) \rightarrow c \cdot f$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy rozmaitość X jest zwarta.
8. Uzasadnij, że podzbiór odwzorowań właściwych w $C^\infty(X, Y)$ jest otwarty w C^∞ -topologii. Zrób to samo dla immersji, submersji.
9. Uzasadnij, że dla gładkiego $f : X \rightarrow Y$ odwzorowanie $f^* : C^\infty(Y, Z) \rightarrow C^\infty(X, Z)$ zadane przez $f^*(g) = g \circ f$ jest ciągłe względem C^∞ -topologii wtedy i tylko wtedy gdy f jest właściwe. Wywnioskuj, że jeśli W jest podrozmaitością w X , to odwzorowanie $C^\infty(X, Y) \rightarrow C^\infty(W, Y)$ określone przez obcięcie $f \rightarrow f|_W$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy W jest podrozmaitością domkniętą.
10. Załóżmy, że ciąg f_n jest zbieżny do g względem C^r -topologii na $C^r(X, Y)$. Uzasadnij, że istnieje zwarty podzbiór $K \subset X$ taki, że dla dostatecznie dużych n zachodzi $f_n(x) = g(x)$ dla $x \in X \setminus K$.
11. Niech $f_t \in C^\infty(X, Y)$, $t \in [0, 1]$, będzie deformacją o zwartym nośniku K , tzn. $f_t(x) = f_0(x)$ dla $x \in X \setminus K$, gładko zależną od parametru t , tzn. odwzorowanie $(t, x) \rightarrow f_t(x)$, $[0, 1] \times X \rightarrow Y$, jest klasy C^∞ . Uzasadnij, że odwzorowanie $t \rightarrow f_t$, $[0, 1] \rightarrow C^\infty(X, Y)$ jest ciągłe względem C^∞ -topologii.
12. Uzasadnij, że zbiór injektywnych immersji w przestrzeni $C(R^1, R^2)$ nie jest otwarty w C^r -topologii Whitneya.
13. Uzasadnij, że grupa $\text{Diff}^r(X)$ dyfeomorfizmów klasy C^r rozmaitości X , dla $r \leq \infty$, jest grupą topologiczną względem C^r -topologii Whitneya.
14. Uzasadnij, że dla dowolnego gładkiego $f : Y \rightarrow Z$ odwzorowanie $f_* : C^\infty(X, Y) \rightarrow C^\infty(X, Z)$ określone przez $f_*(g) = f \circ g$ jest ciągłe względem C^∞ -topologii Whitneya.