ZADANIA Z TOPOLOGII RÓŻNICZKOWEJ
LISTA 4. Transwersalność

Ćwiczenia.

1. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami w przestrzeni wektorowej R^n, które traktujemy jako podrozmaitości. Uzasadnij, że $V_1 \pitchfork V_2$ wtedy i tyko wtedy, gdy $V_1 + V_2 = R^n$.
2. Niech $F : R^n \to R^m$ będzie przekształceniem liniowym, i niech V będzie podprzestrzenią liniową w R^m. Uzasadsnij, że $F \pitchfork V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(R^n) + V = R^m$.
3. Które spośród poniższych par podprzestrzeni linowych przecinają się transwersalnie:
   (1) płaszczyzna Oxy oraz płaszczyzna span$[(0,1,1),(1,-1,0)]$ w R^3;
   (2) płaszczyzna span$[(1,3,0),(2,-1,0)]$ oraz oś Ox w R^3;
   (3) $R^n \times \{0\}$ oraz przekątna $\Delta = \{(x,x) : x \in R^n\}$ w $R^n \times R^n$;
   (4) przekątna Δ oraz *skośna przekątna* $\{(x,-x) : x \in R^n\}$ w $R^n \times R^n$;
   (5) podprzestrzenie symetrycznych oraz antysymetrycznych macierzy w $M_{n\times n}(R)$;
   (6) podprzestrzeń macierzy symetrycznych (odpowiednio, antysymetrycznych) oraz podprzestrzeń macierzy o zerowym śladzie w przestrzeni $M_{n\times n}(R)$?
4. Niech $f : R \to R$ będzie gładką funkcją rzeczywistą i niech $W \subset J^1(R,R)$ będzie podrozmaitoścla dżetów $j^1g(x)$ wszystkich funkcji g o zerowej pochodnej w x, dla wszystkich $x \in R$. Uzasadnij, że warunek $j^1 f \pitchfork W$ jest równoważny temu, że w każdym punkcie krytycznym x (czyli w każdym punkcie x znikania pierwszej pochodnej) funkcja f ma niezerową drugą pochodną.
5. Niech W będzie podrozmaitością w $R^{n+k} = R^n \times R^k$. Uzadsadnij, że dla gęstego zbioru punktów $x \in R^n$ zachodzi $W \pitchfork \{x\} \times R^k$. Sformułuj i uzasadnij podobną własność dla gładkiego odwzorowania $f : X \to R^{n+k}$.

Zadania.

6. Uzasadnij, że $y_0 \in Y$ jest wartościa regularną gładkiego odwzorowania $f : X \to Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy wykres odwzorowania f, jako podrozmaitość w $X \times Y$, jest transwersalny do podrozmaitości $X \times \{y_0\}$.
7. Uzasadnij następujące uogólnienie obserwacji z poprzedniego zadania: gładkie odwzorowanie $f : X \to Y$ jest transwersalne do podrozmaitości $W \subset Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy wykres f jest transwersalny w $X \times Y$ do podrozmaitości $X \times W$ (a jeszcze ogólniej, wtedy i tylko wtedy gdy $j^k f \pitchfork (p_k^Y)^{-1}(W)$, gdzie $p_k^Y : J^k(X,Y) \to Y$ to naturalne rzutowanie).
8. Punkt stały p gładkiego odwzorowania $f : X \to X$ nazywamy *niezdegenerowanym* jeśli różniczka $df_p : T_pX \to T_pX$ nie posiada różnego od 0 punktu stałego.
   (A) Uzasadnij, że niezdegenerowany punkt stały jest izolowany w zbiorze punktów stałych odwzorowania $f : X \to X$.
   (B) Wyraź fakt posiadania przez f wyłącznie niezdegenerowanych punktów stałych za pomocą odpowiedniego warunku transwersalności.
9. Mówimy, że gładkie odwzorowania $f : X_1 \to Y$ oraz $g : X_2 \to Y$ takie, że $f(a) = p = g(b)$ są transwersalne w (a,b) gdy $df_a(T_aX_1) + dg_b(T_bX_2) = T_pY$. Uzasadnij, że $f \pitchfork g$ w (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $f \times g : X_1 \times X_2 \to Y \times Y$, $f \times g(x_1,x_2) = (f(x_1), g(x_2))$, jest transwersalne do przekątnej $\Delta Y \subset Y \times Y$, $\Delta Y = \{(y,y) \in Y \times Y : y \in Y\}$.
10. Przypomnijmy, że krzywizna regularnej krzywej $\gamma : R \to R^3$ w punkcie t jest niezerowa gdy wektory pierwszej i drugiej pochodnej są liniowo niezależne. Wyraź fakt niezerowania się krzywizny regularnej krzywej γ w żadnym punkcie t za pomocą warunku (lub kilku warunków) transwersalności w odpowiedniej rozmaitości dżetów.