

3. Pierścień Eisensteina $\mathbf{E}$ i równanie $x^3 + y^3 = z^3$

1. Uzasadnij, że dwa czynniki, na iloczyn których rozkłada się w $\mathbf{E}$ całkowita liczba pierwsza p postaci $3k + 1$, nie są stowarzyszone.

Celem dalszych zadań jest pokazanie, że równanie $x^3 + y^3 = z^3$ nie ma w $\mathbf{E}$ rozwiązań nietrywialnych (trywialność to warunek $xyz = 0$). Załóżmy więc, że trójka (x, y, z) jest nietrywialnym rozwiązaniem tego równania w $\mathbf{E}$, takim że liczby x, y, z są parami względnie pierwsze (dlaczego można założyć to ostatnie?).

Oznaczenie: $\epsilon = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \omega^2$.

2. Sprawdź, że $\sqrt{-3}$ jest w $\mathbf{E}$ elementem pierwszym, i że $\sqrt{-3} \mid 3$.
3. Uzasadnij, że każdy $e \in \mathbf{E}$ przystaje od 0 lub ± 1 modulo $\sqrt{-3}$.
3. Udowodnij, że jeśli $e \equiv \pm 1 \pmod{\sqrt{-3}}$, to $e^3 \equiv \pm 1 \pmod{\sqrt{-3}^4}$.
4. Uzasadnij, że dokładnie jedna z liczb x, y, z dzieli się przez $\sqrt{-3}$. Wyłumacz, jak bez straty ogólności założyć, że jest nią z .

Niech $\sqrt{-3}^k \parallel z$. Załóżmy, że mamy do czynienia z rozwiązaniem o najmniejszym możliwym k . Naszym celem będzie dojście do sprzeczności przez wyprodukowanie rozwiązania z mniejszym k .

5. Sprawdź, że $x^3 + y^3 = (x + y)(\epsilon x + \epsilon^2 y)(\epsilon^2 x + \epsilon y)$. Uzasadnij, że każdy z tych trzech czynników dzieli się przez $\sqrt{-3}$.

Niech $x + y = A\sqrt{-3}$, $\epsilon x + \epsilon^2 y = B\sqrt{-3}$, $\epsilon^2 x + \epsilon y = C\sqrt{-3}$.

6. Udowodnij, że:
 - a) liczby A, B, C są parami względnie pierwsze;
 - b) $A + B + C = 0$;
 - c) $ABC = \left(\frac{z}{\sqrt{-3}}\right)^3$.
7. Uzasadnij, że dla pewnych $a, b, c \in \mathbf{E}$ i pewnych jednostek $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{E}$ zachodzi $A = \alpha a^3$, $B = \beta b^3$, $C = \gamma c^3$. Uzasadnij, że jedna z liczb a, b, c dzieli się przez $\sqrt{-3}^{k-1}$, a pozostałe nie dzielą się przez $\sqrt{-3}$. Można założyć, że $\sqrt{-3}^{k-1} \parallel c$.
8. Rozważając $A + B + C = 0$ modulo $\sqrt{-3}^4$ wykaż, że $\alpha = \pm\beta = \pm\gamma$. Konkluduj.