

5. Równanie Pella

Załóżmy, że dodatnia $D \in \mathbf{Z}$ jest bezkwadratowa (tzn. nie dzieli się przez kwadrat żadnej liczby pierwszej). Będziemy rozważać równanie Pella

$$(P) \quad x^2 - Dy^2 = \pm 1.$$

Równanie to opisuje odwracalne elementy pierścienia $\mathbf{Z}[\sqrt{D}]$:

1. Zauważ, że para liczb całkowitych (x, y) spełnia $(P) \iff N(x + y\sqrt{D}) = \pm 1$.

Będziemy zatem, wymiennie, mówić o rozwiązaniach (P) w $\mathbf{Z}$, bądź o rozwiązaniach $N(z) = \pm 1$ w $\mathbf{Z}[\sqrt{D}]$.

2. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych $\frac{p}{q}$, takich że $|\sqrt{D} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

(Wsk. pewne dwie liczby postaci $k\sqrt{D} - [k\sqrt{D}]$, $0 \leq k \leq n$, różnią się o mniej niż $\frac{1}{n}$.)

3. Udowodnij, że jeśli $\frac{p}{q}$ spełnia warunek z poprzedniego zadania, to $1 \leq |N(p + q\sqrt{D})| \leq 2\sqrt{D} + 1$.

4. Uzasadnij, że dla pewnego niezerowego $n \in [-2\sqrt{D} - 1, 2\sqrt{D} + 1]$ istnieje nieskończenie wiele liczb $z \in \mathbf{Z}[\sqrt{D}]$ o normie n . Wywnioskuj stąd, że równanie $x^2 - Dy^2 = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

5. Udowodnij, że równanie $N(z) = \pm 1$ ma rozwiązanie większe od 1.

6. Udowodnij, że wśród rozwiązań $N(z) = \pm 1$ większych od 1 istnieje najmniejsze rozwiązanie. W tym celu wykaż, że to równanie ma tylko skończenie wiele rozwiązań w każdym przedziale $[1, M]$.

(Wsk. jeśli $N(z) = \pm 1$ oraz $1 \leq z \leq M$, to $-1 \leq \bar{z} \leq 1$.)

Niech ϵ będzie rozwiązaniem z poprzedniego zadania.

7. Udowodnij, że każde większe od 1 rozwiązanie $N(z) = \pm 1$ jest postaci ϵ^n dla pewnego dodatniego $n \in \mathbf{Z}$.

8. Uzasadnij, że każde rozwiązanie $N(z) = \pm 1$ jest postaci $\pm \epsilon^n$ dla pewnego $n \in \mathbf{Z}$.

9. Znajdź ϵ dla $D = 2$ i dla $D = 3$.

Dla innych D liczbę ϵ można znaleźć rozwijając $\sqrt{D}$ w ułamek łańcuchowy.