

TEORIA REPREZENTACJI GRUP

Opracowanie notatek z wykładu
prof. Marka Bożejki, rok akademicki 2016/2017

Opracowanie studenckie

30 stycznia 2026

Spis treści

1	Grupy dyskretne i grupy zwarte	3
2	Miara Haara	4
3	Reprezentacje liniowe grup	6
3.1	Reprezentacje przywiedlne i nieprzywiedlne	6
4	Reprezentacje unitarne i rozkłady	7
4.1	Sumy proste i rozkłady	8
5	Ciągłość i Algebry Grupowe	8
5.1	Reprezentacje regularne	9
5.2	Algebra grupowa i splot	9
6	Lemat Schura	9
7	Iloczyny Tensorowe i Algebra Fouriera-Stieltjesa	11
7.1	Iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta	11
7.2	Reprezentacje tensorowe	11
7.3	Przykłady reprezentacji unitarnych grup abelowych	12
7.4	Algebra Fouriera-Stieltjesa	12
8	Relacje Ortogonalności	13

9	Teoria Charakterów i Funkcje Centralne	13
9.1	Własności charakterów	14
9.2	Twierdzenie Petera-Weyla i Gęstość	14
10	Rozkład reprezentacji regularnej i wnioski	15
11	Liczby algebraiczne i podzielność wymiarów	15
12	Funkcje dodatnio określone	16
12.1	Własności i przykłady: Jądra Dirichleta i Fejera	16
13	Twierdzenie Herglotza i związek z reprezentacjami	17
14	Konstrukcja Gelfanda-Naimarka-Segala (GNS)	17

1 Grupy dyskretne i grupy zwarte

PRZYMIJMY, że definicja grupy jest znana. W niniejszych notatkach będziemy rozważali grupy dyskretne, jak również grupy topologiczne zwarte. Zanim przejdziemy do głębszej analizy, sformalizujemy podstawowe pojęcia.

Definicja 1.1: Grupa topologiczna

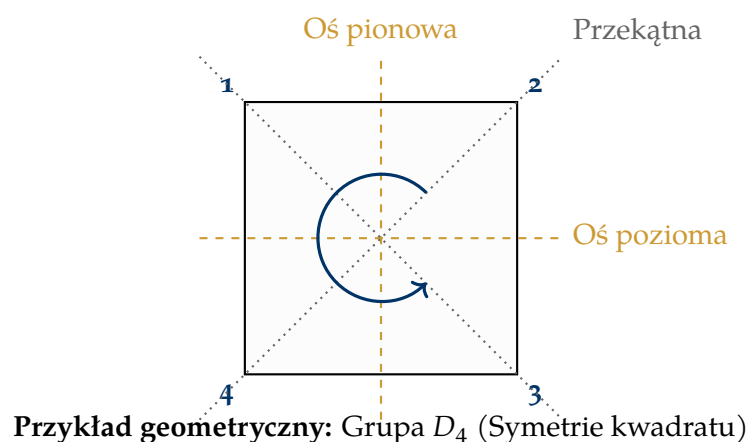
Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, na której dodatkowo określona jest topologia. G jest **grupą topologiczną**, jeśli działania:

- mnożenie: $(x, y) \mapsto x \cdot y$,
- odwracanie: $x \mapsto x^{-1}$,

są ciągłe w topologii G .

Przykład : Grupami topologicznymi są:

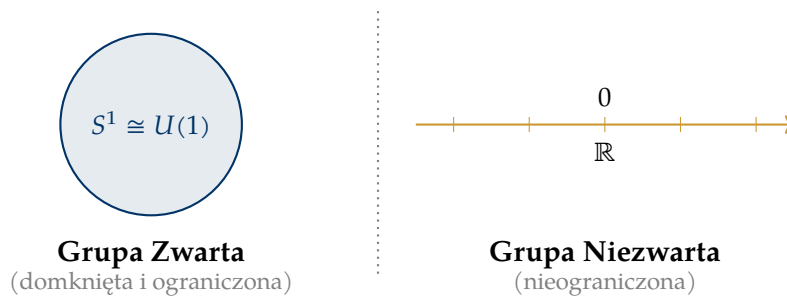
- grupa liczb rzeczywistych z dodawaniem $(\mathbb{R}, +)$,
- grupa liczb rzeczywistych bez zera z mnożeniem $(\mathbb{R}^*, \cdot)$,
- grupy macierzowe $SO(n)$, $O(n)$, $SU(n)$, $U(n)$, $GL(n)$ z działaniem mnożenia macierzy.



W dalszych rozważaniach będą nas interesować szczególne przypadki grup.

Definicja 1.2: Grupa (lokalnie) zwarta

Grupę topologiczną G nazywamy **grupą (lokalnie) zwartą**, jeśli G jest (lokalnie) zwarta jako przestrzeń topologiczna.



Przykład : Warto zauważyć, co **nie jest** grupą zwartą:

- nieskończone grupy dyskretne (są zwarte $\iff$ są skończone),
- grupy euklidesowe $(\mathbb{R}^n, +)$,
- ogólna grupa liniowa $GL(n, \mathbb{C})$.

Kluczowym przykładem, który będzie powracał w dalszej części wykładu, jest grupa unitarna.

Przykład : Grupa unitarna $U(n)$

Grupa macierzowa

$$U(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) : A^* A = I\}$$

jest grupą zwartą.

Dowód. Rozważmy $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ jako przestrzeń $\mathbb{R}^{2n^2}$ z topologią euklidesową. Z twierdzenia Heinego-Borela zbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

1. Ograniczoność: Dla $A = (u_{ij}) \in U(n)$ zachodzi warunek $\sum_k u_{ik} \overline{u_{jk}} = \delta_{ij}$. W szczególności dla $i = j$:

$$\sum_{k=1}^n |u_{ik}|^2 = 1.$$

Suma kwadratów modułów wszystkich wyrazów macierzy wynosi:

$$\sum_{i,k} |u_{ik}|^2 = \sum_i 1 = n.$$

Zatem $U(n)$ jest zbiorem ograniczonym.

2. Domkniętość: Rozważmy odwzorowanie $f : M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$ zadane wzorem $f(A) = A^* A$. Jest to odwzorowanie ciągłe. Zbiór $\{I\}$ jest domknięty, zatem $f^{-1}(\{I\}) = U(n)$ jest zbiorem domkniętym. $\square$

2 Miara Haara

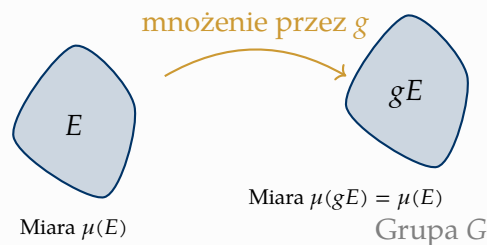
Kluczowym narzędziem w analizie na grupach topologicznych jest odpowiednik miary Lebesgue'a, pozwalający na całkowanie w sposób niezmienniczy.

Twierdzenie 2.1: O istnieniu miary Haara Na każdej grupie lokalnie zwartej G istnieje miara (Borela) μ , która jest:

1. nietrywialna,
2. skończona na zbiorach zwartych,

3. lewostronnie niezmiennicza, tzn. dla każdego $g \in G$ i $E \subset G$: $\mu(gE) = \mu(E)$.

Taka miara jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej multiplikatywnej. Nazywamy ją **lewą miarą Haara**.



Niezmienniczość: $\mu(gE) = \mu(E)$

Jeśli zdefiniujemy prawą miarę Haara (niezmienniczą na mnożenie z prawej strony), może się okazać, że różni się ona od lewej. Związek między nimi opisuje funkcja modułowa $\Delta(g)$, taka że $\mu_L(Eg) = \Delta(g)\mu_L(E)$.

Definicja 2.1: Grupa unimodularna

Grupę G nazywamy **unimodularną**, jeśli lewa miara Haara jest jednocześnie prawą miarą Haara. Jest to równoważne warunkowi:

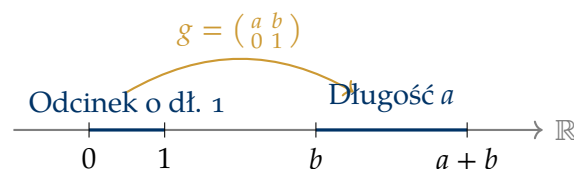
$$\forall_{g \in G} \quad \Delta(g) = 1.$$

Przykład : Grupa „ax+b” (Grupa afiniczna prostej)

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : y > 0, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Działanie tej grupy na prostej rzeczywistej $x \mapsto ax + b$ można zilustrować jako połączenie skalowania i przesunięcia.

Skalowanie o a + Translacja o b



Miary Haara dla tej grupy to:

- Lewa: $d\mu_L(x, y) = \frac{dx dy}{y^2}$
- Prawa: $d\mu_R(x, y) = \frac{dx dy}{y}$

Ponieważ są różne, grupa ta **nie jest unimodularna**.

Twierdzenie 2.2: Unimodularność grup zwartych Każda grupa zwarta jest unimodularna.

Dowód. Funkcja modułowa $\Delta : G \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot)$ jest ciągłym homomorfizmem. Obraz grupy zwartej G musi być podgrupą zwartą w $\mathbb{R}_+$. Jedyną taką podgrupą jest $\{1\}$, zatem $\Delta(g) \equiv 1$. $\square$

3 Reprezentacje liniowe grup

Reprezentacja pozwala badać abstrakcyjną strukturę grupy poprzez jej działanie na przestrzeni liniowej.

Definicja 3.1: Reprezentacja liniowa

Reprezentacją liniową grupy G w przestrzeni wektorowej V (nad $\mathbb{C}$) nazywamy homomorfizm grup:

$$\pi : G \rightarrow GL(V),$$

gdzie $GL(V)$ to grupa odwracalnych operatorów liniowych na V .

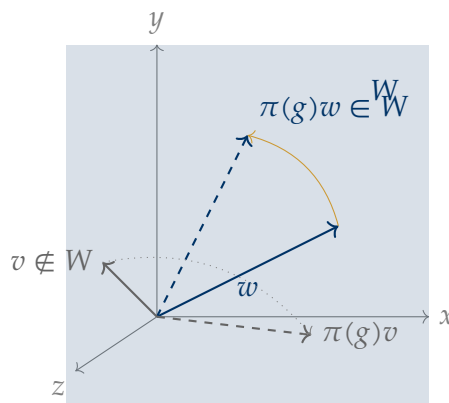
Dla grup topologicznych wymagamy dodatkowo ciągłości odwzorowania $g \mapsto \pi(g)v$ dla każdego $v \in V$.

3.1 Reprezentacje przywiedlnie i nieprzywiedlnie

Definicja 3.2: Podprzestrzeń niezmiennicza

Podprzestrzeń $W \subset V$ nazywamy **niezmienniczą** względem π , jeśli:

$$\forall g \in G \forall w \in W \quad \pi(g)w \in W.$$



Podprzestrzeń niezmiennicza W
Reprezentacja „nie wypada” z W

Definicja 3.3: Reprezentacja nieprzywiedlna

Reprezentację π w przestrzeni $V \neq \{0\}$ nazywamy **nieprzywiedlną** (*irreducible*), jeśli nie posiada ona nietrywialnych domkniętych podprzestrzeni niezmienniczych.

Przykład : Reprezentacja trywialna

Dla $V = \mathbb{C}$ definiujemy $\pi(g) = \text{id}$ dla każdego $g \in G$. Jest to reprezentacja nieprzywiedlna.

4 Reprezentacje unitarne i rozkłady

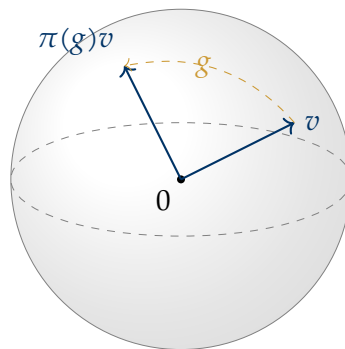
Szczególnie ważną klasą reprezentacji są reprezentacje unitarne, zachowujące strukturę iloczynu skalarnego.

Definicja 4.1: Reprezentacja unitarna

Niech V będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Reprezentację $\pi : G \rightarrow GL(V)$ nazywamy **unitarną**, jeśli dla każdego $g \in G$ operator $\pi(g)$ jest unitarny, tzn.:

$$\forall_{v,w \in V} \quad \langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Oznacza to, że $\pi(g)^* = \pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$.



Unitarność: $\|\pi(g)v\| = \|v\|$
(Zachowanie długości / obrót)

Dla grup zwartych każdą reprezentację na przestrzeni Hilberta można „poprawić” do reprezentacji unitarnej.

Twierdzenie 4.1: Unitaryzowalność reprezentacji Niech π będzie ograniczoną reprezentacją grupy zwartej G w przestrzeni Hilberta H . Wówczas w H istnieje nowy iloczyn skalarny, równoważny wyjściowemu, względem którego π jest unitarna.

Dowód. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ będzie wyjściowym iloczynem skalarnym. Zdefiniujemy nowy iloczyn skalarny jako uśrednienie po grupie (korzystając z miary Haara):

$$\langle v, w \rangle := \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle_0 d\mu(g).$$

Dzięki niezmienniczości miary Haara ($\mu(hg) = \mu(g)$), nowy iloczyn jest niezmienniczy:

$$\langle \pi(h)v, \pi(h)w \rangle = \int_G \langle \pi(hg)v, \pi(hg)w \rangle_0 d\mu(g) = \int_G \langle \pi(k)v, \pi(k)w \rangle_0 d\mu(k) = \langle v, w \rangle.$$

□

4.1 Sumy proste i rozkłady

Definicja 4.2: Suma prosta reprezentacji

Jeśli (π_1, V_1) i (π_2, V_2) są reprezentacjami grupy G , ich **sumą prostą** nazywamy reprezentację $\pi_1 \oplus \pi_2$ działającą na $V_1 \oplus V_2$ wzorem:

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(g)(v_1, v_2) = (\pi_1(g)v_1, \pi_2(g)v_2).$$

Kluczową własnością reprezentacji unitarnych jest ich całkowita redukowalność.

Twierdzenie 4.2: O rozkładzie Jeśli π jest reprezentacją unitarną w przestrzeni Hilberta H , a $W \subset H$ jest podprzestrzenią niezmienniczą, to dopełnienie ortogonalne $W^\perp$ jest również podprzestrzenią niezmienniczą.

Dowód. Niech $v \in W^\perp$. Chcemy pokazać, że dla dowolnego $g \in G$, $\pi(g)v \in W^\perp$. Weźmy dowolne $w \in W$. Wtedy:

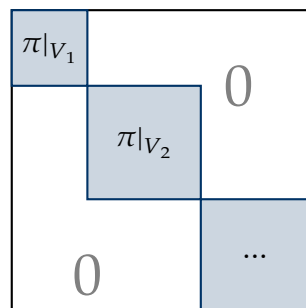
$$\langle \pi(g)v, w \rangle = \langle v, \pi(g)^*w \rangle = \langle v, \pi(g^{-1})w \rangle.$$

Ponieważ W jest niezmiennicza, $\pi(g^{-1})w \in W$. Skoro $v \in W^\perp$, to iloczyn ten wynosi 0. Zatem $\pi(g)v \perp W$. $\square$

Twierdzenie 4.3: Twierdzenie Maschke (wersja dla grup zwartych) Każda skończenie wymiarowa reprezentacja unitarna grupy zwartej rozkłada się na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n,$$

gdzie każde V_i jest podprzestrzenią niezmienniczą i reprezentacja ograniczona do V_i jest nieprzywiedlna.



Macierzowa postać operatora $\pi(g)$ w bazie zgodnej z rozkładem

5 Ciągłość i Algebry Grupowe

W przypadku nieskończenie wymiarowych reprezentacji grup topologicznych, pojęcie ciągłości wymaga precyzji.

Uwaga 5.1: Topologie operatorowe

Dla reprezentacji $\pi : G \rightarrow U(H)$ (grupa operatorów unitarnych) rozważa się zazwyczaj **silną ciągłość**. Oznacza ona, że dla każdego $v \in H$ odwzorowanie $g \mapsto \pi(g)v$ jest ciągłe w normie H .

5.1 Reprezentacje regularne

Jednymi z najważniejszych reprezentacji w teorii są te, które grupa „indukuje na samej sobie”.

Definicja 5.1: Reprezentacja regularna

Rozważmy przestrzeń $L^2(G)$ funkcji całkowalnych z kwadratem względem miary Haara.

- Lewa reprezentacja regularna λ :

$$(\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x).$$

- Prawa reprezentacja regularna ρ :

$$(\rho(g)f)(x) = f(xg).$$

Obie są reprezentacjami unitarnymi grupy G .

5.2 Algebra grupowa i splot

Dla grupy G (lokalnie zwartej) możemy zdefiniować strukturę algebry na przestrzeni funkcji całkowalnych $L^1(G)$ (oznaczanej też $K[G]$). Mnożeniem w tej algebrze jest **splot**.

Definicja 5.2: Splot funkcji

Dla funkcji $f_1, f_2 \in L^1(G)$ definiujemy ich splot jako:

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x) d\mu(y).$$

Algebra $L^1(G)$ z działaniem splotu jest algebrą Banacha. Zachodzi nierówność:

$$\|f_1 * f_2\|_1 \leq \|f_1\|_1 \cdot \|f_2\|_1.$$

Twierdzenie 5.1: Reprezentacje grupy a algebry Istnieje wzajemna odpowiedniość (bi-jekcja) między unitarnymi reprezentacjami grupy G , a niezdegenerowanymi reprezentacjami algebry $L^1(G)$.

Dla danej reprezentacji grupy π , definiujemy reprezentację algebry $\tilde{\pi}$ wzorem:

$$\tilde{\pi}(f) = \int_G f(g) \pi(g) d\mu(g).$$

Operator $\tilde{\pi}(f)$ jest dobrze określony (jako całka Bochnera). Własność homomorfizmu przenosi się następująco:

$$\tilde{\pi}(f_1 * f_2) = \tilde{\pi}(f_1) \tilde{\pi}(f_2).$$

6 Lemat Schura

Kluczowym twierdzeniem w teorii reprezentacji, łączącym strukturę reprezentacji z algebrą operatorów na przestrzeni Hilberta, jest Lemat Schura. Zanim go sformułujemy, zauważmy ważny związek między nieprzywiedlnością reprezentacji grupy a algebry.

Twierdzenie 6.1: Zachowanie nieprzywiedlności Reprezentacja unitarna π grupy G jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadająca jej reprezentacja $\tilde{\pi}$ algebry $L^1(G)$ jest nieprzywiedlna.

Przejdźmy teraz do klasycznego Lematu Schura. Posiada on dwie główne wersje.

Twierdzenie 6.2: Lemat Schura – Wersja 1 Niech $\pi : G \rightarrow GL(V)$ będzie reprezentacją nieprzywiedlną skończonego wymiaru nad ciałem algebraicznie domkniętym (np. $\mathbb{C}$). Jeśli operator liniowy $T : V \rightarrow V$ jest przemienny z reprezentacją, tzn.:

$$\forall_{g \in G} \quad T\pi(g) = \pi(g)T,$$

to T musi być homotetią, czyli $T = \lambda \cdot \text{Id}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dowód. Niech λ będzie wartością własną operatora T (istnieje, bo ciało jest algebraicznie domknięte). Zdefiniujmy przestrzeń $W = \ker(T - \lambda \text{Id})$. Dla $w \in W$ mamy:

$$(T - \lambda \text{Id})\pi(g)w = \pi(g)(T - \lambda \text{Id})w = \pi(g)0 = 0.$$

Zatem W jest podprzestrzenią niezmienniczą. Ponieważ $W \neq \{0\}$ (bo λ to wartość własna), a reprezentacja jest nieprzywiedlna, to musi zachodzić $W = V$. Stąd $T = \lambda \text{Id}$. $\square$

Twierdzenie 6.3: Lemat Schura – Wersja 2 Niech $\pi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ oraz $\pi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami nieprzywiedlnymi. Niech $T : V_1 \rightarrow V_2$ będzie operatorem splotowym (intertwining operator), tzn.:

$$\forall_{g \in G} \quad T\pi_1(g) = \pi_2(g)T.$$

Wówczas:

1. Jeśli π_1 i π_2 nie są równoważne, to $T = 0$.
2. Jeśli $T \neq 0$, to T jest izomorfizmem (czyli reprezentacje są równoważne).

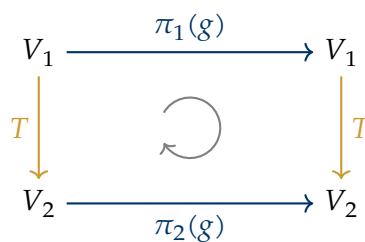


Diagram przemienny: droga "górną" jest równoważna drodze "dołem"
 $T \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ T$

Uwaga 6.1: Wersja nieskończenie wymiarowa

Dla unitarnych reprezentacji na przestrzeniach Hilberta Lemat Schura również zachodzi, ale wymaga ostrożniejszego sformułowania. Reprezentacja unitarna π jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy komutant jej obrazu składa się tylko ze skalarów:

$$\{T \in B(H) : \forall_{g \in G} T\pi(g) = \pi(g)T\} = \mathbb{C} \cdot \text{Id}.$$

Dowód w tym przypadku opiera się na twierdzeniu spektralnym dla operatorów normal-

nych.

7 Iloczyny Tensorowe i Algebra Fouriera-Stieltjesa

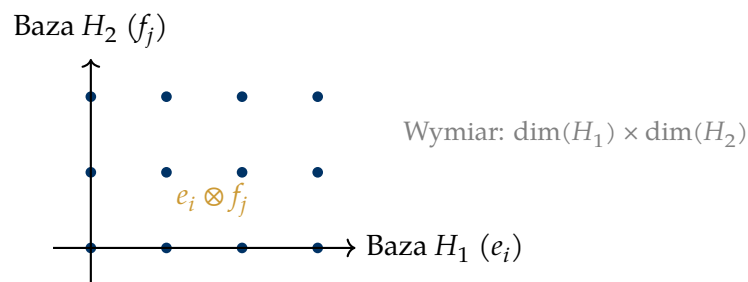
Konstrukcja iloczynu tensorowego pozwala na tworzenie nowych reprezentacji z już istniejących.

7.1 Iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta

Definicja 7.1: Iloczyn tensorowy

Niech H_1, H_2 będą przestrzeniami Hilberta. Ich **iloczynem tensorowym** $H_1 \otimes H_2$ nazywamy uzupełnienie algebraicznego iloczynu tensorowego względem iloczynu skalarnego zdefiniowanego na tensorach prostych jako:

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdot \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}.$$



Jeśli $\{e_i\}$ jest bazą ortonormalną H_1 , a $\{f_j\}$ bazą H_2 , to zbiór $\{e_i \otimes f_j\}$ stanowi bazę ortonormalną $H_1 \otimes H_2$.

7.2 Reprezentacje tensorowe

Mając dane operatory $A \in B(H_1)$ i $B \in B(H_2)$, definiujemy operator $A \otimes B$ na $H_1 \otimes H_2$ wzorem:

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By.$$

Przykład : Przykład macierzowy (Iloczyn Kroneckera)

Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, ich iloczyn tensorowy to macierz blokowa:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}.$$

Wymiar macierzy wynikowej to iloczyn wymiarów macierzy wyjściowych.

Jeśli π_1, π_2 są reprezentacjami grupy G , ich iloczyn tensorowy $\pi_1 \otimes \pi_2$ definiujemy punktowo:

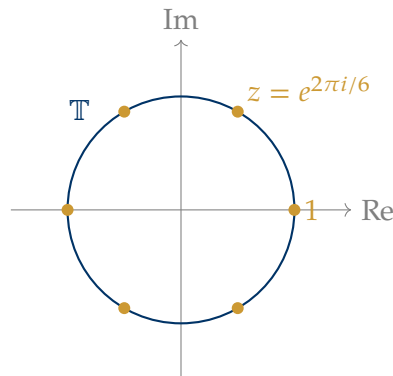
$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(g) = \pi_1(g) \otimes \pi_2(g).$$

7.3 Przykłady reprezentacji unitarnych grup abelowych

Przykład : Reprezentacje grupy $\mathbb{Z}$ Dla grupy liczb całkowitych z dodawaniem, reprezentacje nieprzywiedlne są jednowymiarowe (bo grupa jest abelowa).

$$\pi(n) = z^n, \quad \text{gdzie } |z| = 1.$$

Reprezentacje te są parametryzowane przez liczby z okręgu jednostkowego $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Zatem zbiór reprezentacji nieprzywiedlnych (tzw. dualny) to $\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$.



Reprezentacje grupy $\mathbb{Z}$
odpowiadają punktom na okręgu

Przykład : Reprezentacje grupy $\mathbb{R}$ Dla grupy liczb rzeczywistych z dodawaniem, każda ciągła unitarna reprezentacja nieprzywiedlna jest postaci:

$$\pi_x(t) = e^{ixt}, \quad \text{dla pewnego } x \in \mathbb{R}.$$

Odzworowanie $x \mapsto \pi_x$ jest izomorfizmem między $\mathbb{R}$ a jej grupą dualną $\hat{\mathbb{R}}$.

7.4 Algebra Fouriera-Stieltjesa

Badanie reprezentacji grupy jest ściśle związane z analizą funkcji na tej grupie generowanych przez te reprezentacje.

Definicja 7.2: Współczynnik macierzowy

Niech π będzie reprezentacją unitarną na H . Dla wektorów $\xi, \eta \in H$ funkcję:

$$u_{\xi, \eta}(g) = \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle$$

nazywamy **współczynnikiem macierzowym** reprezentacji π .

Definicja 7.3: Algebra Fouriera-Stieltjesa $B(G)$

Algebrą Fouriera-Stieltjesa $B(G)$ nazywamy zbiór wszystkich liniowych kombinacji współczynników macierzowych wszystkich unitarnych reprezentacji grupy G . Zbiór ten jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie (punktowe), co czyni go algebrą funkcji na G .

Warto zauważyć, że mnożenie dwóch współczynników macierzowych odpowiada współczynnikowi macierzowemu iloczynowi tensorowemu reprezentacji:

$$u_{\xi_1, \eta_1}^{\pi_1}(g) \cdot u_{\xi_2, \eta_2}^{\pi_2}(g) = u_{\xi_1 \otimes \xi_2, \eta_1 \otimes \eta_2}^{\pi_1 \otimes \pi_2}(g).$$

8 Relacje Ortogonalności

Dla grup zwartych istnieje potężne narzędzie analityczne znane jako relacje ortogonalności Schura, które stanowią uogólnienie relacji ortogonalności dla szeregów Fouriera.

Twierdzenie 8.1: Relacje ortogonalności Niech G będzie grupą zwartą. Niech π i σ będą nierównoważnymi, nieprzywiedlnymi reprezentacjami unitarnymi w przestrzeniach V_π i V_σ . Wówczas:

1. Współczynniki macierzowe reprezentacji π są ortogonalne do współczynników macierzowych reprezentacji σ w przestrzeni $L^2(G)$.

$$\forall \xi, \eta \in V_\pi \quad \forall v, w \in V_\sigma \quad \int_G \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle \overline{\langle \sigma(g)v, w \rangle} d\mu(g) = 0.$$

2. Dla ustalonej reprezentacji nieprzywiedlnej π o wymiarze d_π , zachodzi relacja:

$$\int_G \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle \overline{\langle \pi(g)v, w \rangle} d\mu(g) = \frac{1}{d_\pi} \langle \xi, v \rangle \overline{\langle \eta, w \rangle}.$$

Wybierając bazy ortonormalne $\{e_i\}$ w V_π i $\{f_k\}$ w V_σ , możemy zapisać te relacje w postaci macierzowej:

$$\langle u_{ij}^{(\pi)}, u_{kl}^{(\sigma)} \rangle_{L^2} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \pi \not\cong \sigma \\ \frac{1}{d_\pi} \delta_{ik} \delta_{jl} & \text{jeśli } \pi = \sigma \end{cases}$$

Wnioskiem z tego twierdzenia jest to, że funkcje $\{\sqrt{d_\pi} u_{ij}^{(\pi)}\}$ tworzą układ ortonormalny w $L^2(G)$.

9 Teoria Charakterów i Funkcje Centralne

Charaktery reprezentacji odgrywają kluczową rolę w klasyfikacji reprezentacji, ponieważ zawierają pełną informację o reprezentacji (z dokładnością do równoważności), będąc jednocześnie prostszymi obiektami (funkcjami skalarnymi).

Definicja 9.1: Charakter reprezentacji

Niech $\pi : G \rightarrow U(V)$ będzie skończonej wymiarowej reprezentacją unitarną. **Charakterem** reprezentacji π nazywamy funkcję $\chi_\pi : G \rightarrow \mathbb{C}$ zdefiniowaną jako ślad operatora:

$$\chi_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g)) = \sum_{i=1}^{d_\pi} \langle \pi(g)e_i, e_i \rangle,$$

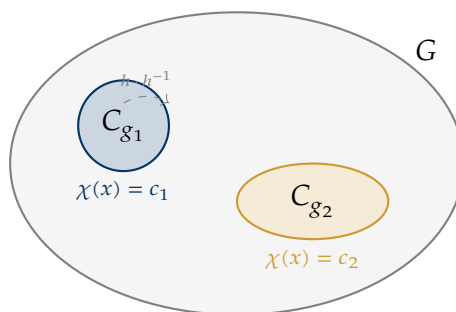
gdzie $\{e_i\}$ jest dowolną bazą ortonormalną V .

Uwaga 9.1: Charakter w algebrze

Charakter jest sumą diagonalnych współczynników macierzowych, zatem $\chi_\pi \in B(G)$.

9.1 Własności charakterów

1. **Niezmienność na sprzężeniu:** $\chi_\pi(hgh^{-1}) = \chi_\pi(g)$. Funkcje o tej własności nazywamy **funkcjami centralnymi** (lub klasowymi).
2. $\chi_\pi(e) = \dim V$.
3. $\chi_\pi(g^{-1}) = \overline{\chi_\pi(g)}$.
4. Dla sumy prostej: $\chi_{\pi \oplus \sigma} = \chi_\pi + \chi_\sigma$.
5. Dla iloczynu tensorowego: $\chi_{\pi \otimes \sigma} = \chi_\pi \cdot \chi_\sigma$.



Funkcje centralne: stałe na klasach sprzężoności

Twierdzenie 9.1: Ortogonalność charakterów Niech π i σ będą nieprzywiedlnymi reprezentacjami unitarnymi grupy zwartej G . Wówczas:

$$\langle \chi_\pi, \chi_\sigma \rangle_{L^2(G)} = \int_G \chi_\pi(g) \overline{\chi_\sigma(g)} d\mu(g) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \pi \cong \sigma \\ 0 & \text{jeśli } \pi \not\cong \sigma \end{cases}$$

9.2 Twierdzenie Petera-Weyla i Gęstość

Twierdzenie Petera-Weyla jest kamieniem węgielnym analizy harmonicznej na grupach zwartych. Możemy je sformułować w języku gęstości algebry współczynników.

Twierdzenie 9.2: Twierdzenie Petera-Weyla (Aspekt gęstości) Przestrzeń liniowa rozpięta przez współczynniki macierzowe wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji unitarnych grupy zwartej G jest gęsta w:

- przestrzeni funkcji ciągłych $C(G)$ w normie supremum,
- przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem $L^2(G)$ w normie L^2 .

Z tego twierdzenia wynika ważny wniosek dotyczący funkcji centralnych.

Twierdzenie 9.3: Baza funkcji centralnych Charaktery $\{\chi_\pi\}_{\pi \in \hat{G}}$ reprezentacji nieprzywiedlnych tworzą bazę ortonormalną w podprzestrzeni funkcji centralnych w $L^2(G)$,

oznaczanej $L_{cent}^2(G)$.

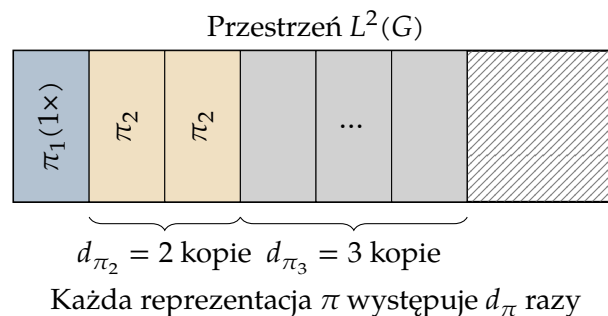
Oznacza to, że każdą funkcję centralną $f \in L_{cent}^2(G)$ można rozwinąć w szereg charakterów:

$$f = \sum_{\pi \in \hat{G}} \hat{f}(\pi) \chi_{\pi}, \quad \text{gdzie } \hat{f}(\pi) = \langle f, \chi_{\pi} \rangle.$$

10 Rozkład reprezentacji regularnej i wnioski

Twierdzenie 10.1: Rozkład $L^2(G)$ Lewa reprezentacja regularna λ grupy zwartej G w przestrzeni $L^2(G)$ rozkłada się na sumę prostą wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji unitarnych, przy czym krotność występowania każdej reprezentacji π jest równa jej wymiarowi d_{π} :

$$L^2(G) \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} d_{\pi} \pi \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \underbrace{(V_{\pi} \oplus \dots \oplus V_{\pi})}_{d_{\pi} \text{ razy}}.$$



Wniosek 10.1: Tożsamość Parsevala dla grup skończonych Jeśli G jest grupą skończoną, to wymiar przestrzeni $L^2(G)$ (równy rządowi grupy $|G|$) jest sumą kwadratów wymiarów reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$|G| = \sum_{\pi \in \hat{G}} d_{\pi}^2.$$

11 Liczby algebraiczne i podzielność wymiarów

To sekcja poświęcona jednemu z najpiękniejszych wyników klasycznej teorii reprezentacji grup skończonych.

Definicja 11.1: Liczba algebraiczna całkowita

Liczbę zespoloną α nazywamy **algebraiczną całkowitą**, jeśli jest pierwiastkiem wielomianu unormowanego (współczynnik przy najwyższej potęgze równy 1) o współczynnikach całkowitych:

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Zbiór tych liczb oznaczamy przez $\mathbb{A}$.

Twierdzenie 11.1: Pierścień liczb algebraicznych Zbiór $\mathbb{A}$ jest podpierścieniem ciała $\mathbb{C}$. Oznacza to, że suma i iloczyn liczb algebraicznych całkowitych są liczbami algebraicznymi

całkowitymi.

Dowód wykorzystuje własności iloczynu tensorowego macierzy i wyznaczników.

Twierdzenie 11.2: Podzielność wymiarów Wymiar dowolnej nieprzywiedlnej reprezentacji d_π grupy skończonej G jest dzielnikiem rzędu grupy $|G|$.

$$d_\pi \mid |G|.$$

Kluczowym elementem dowodu jest wykazanie, że liczba $|G|/d_\pi$ jest liczbą algebraiczną całkowitą. Ponieważ jest to liczba wymierna, a jedynymi wymiernymi liczbami algebraicznymi całkowitymi są liczby całkowite ($\mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$), dowód zostaje zakończony.

12 Funkcje dodatnio określone

Definicja 12.1: Funkcja dodatnio określona

Funkcję ciągłą $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **dodatnio określoną**, jeśli dla dowolnego skończonego zbioru punktów $x_1, \dots, x_n \in G$ i dowolnych liczb zespolonych $c_1, \dots, c_n$, zachodzi nierówność:

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \phi(x_j^{-1} x_i) \geq 0.$$

Macierz $A = (a_{ij})$ gdzie $a_{ij} = \phi(x_j^{-1} x_i)$ jest macierzą dodatnio określoną w sensie algebry liniowej.

Uwaga 12.1: Iloczyn Hadamarda

Iloczyn punktowy (Hadamarda) dwóch macierzy dodatnio określonych jest macierzą dodatnio określoną. Wynika stąd, że iloczyn dwóch funkcji dodatnio określonych na grupie jest funkcją dodatnio określoną.

12.1 Własności i przykłady: Jądra Dirichleta i Fejera

Wróćmy do analizy harmonicznej na okręgu $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Przykład : Jądro Dirichleta D_N jest zdefiniowane jako:

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Jądro to **nie jest** funkcją dodatnio określoną w sensie globalnym (nie jest transformatą dodatniej miary skończonej, gdyż norma w L^1 rośnie logarytmicznie).

Przykład : Jądro Fejera F_N powstaje jako średnia arytmetyczna jąder Dirichleta (sumowanie metodą Cesàro):

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(t) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{int} = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2((N+1)t/2)}{\sin^2(t/2)}.$$

Ponieważ $F_N(t) \geq 0$, a współczynniki Fouriera są spłotem (w dziedzinie częstotliwości), jądro Fejera jest funkcją dodatnio określoną.

13 Twierdzenie Herglotza i związek z reprezentacjami

Istnieje głęboki związek między funkcjami dodatnio określonymi a reprezentacjami unitarnymi. Jeden kierunek jest prosty do wykazania.

Twierdzenie 13.1: *Reprezentacja generuje funkcję dodatnio określoną* Niech $\pi : G \rightarrow U(H)$ będzie reprezentacją unitarną, a $\xi \in H$ dowolnym wektorem. Wtedy funkcja

$$\phi(g) = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$$

jest funkcją dodatnio określoną na G .

Dowód. Sprawdzamy definicję. Niech $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ oraz $x_1, \dots, x_n \in G$.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \phi(x_j^{-1} x_i) &= \sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \langle \pi(x_j^{-1} x_i) \xi, \xi \rangle \\ &= \sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \langle \pi(x_i) \xi, \pi(x_j) \xi \rangle \\ &= \left\langle \sum_i c_i \pi(x_i) \xi, \sum_j c_j \pi(x_j) \xi \right\rangle \\ &= \left\| \sum_i c_i \pi(x_i) \xi \right\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

Dla klasycznej grupy liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ (dyskretnej) zachodzi słynne twierdzenie charakteryzujące funkcje dodatnio określone.

Twierdzenie 13.2: *Twierdzenie Herglotza* Funkcja $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona miara dodatnia μ na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$, taka że:

$$\phi(n) = \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu(z) \quad (= \hat{\mu}(n)).$$

14 Konstrukcja Gelfanda-Naimarka-Segala (GNS)

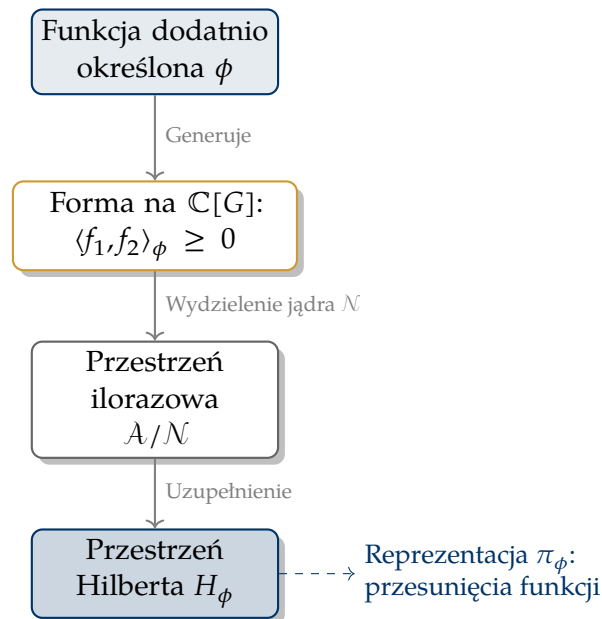
Twierdzenie GNS to fundamentalny wynik pokazujący, że każda funkcja dodatnio określona pochodzi od pewnej reprezentacji unitarnej (jest to odwrotność Twierdzenia 13.1).

Twierdzenie 14.1: *Twierdzenie GNS* Dla każdej funkcji dodatnio określonej ϕ na grupie G (przyjmijmy dla uproszczenia grupę dyskretną lub rozważmy odpowiednie algebry dla grup topologicznych) istnieje:

- przestrzeń Hilberta H_ϕ ,
- reprezentacja unitarna $\pi_\phi : G \rightarrow U(H_\phi)$,
- wektor cykliczny $\xi_\phi \in H_\phi$,

takie, że dla każdego $g \in G$:

$$\phi(g) = \langle \pi_\phi(g) \xi_\phi, \xi_\phi \rangle.$$



Dowód. Konstrukcja przebiega w kilku krokach.

Krok 1: Pre-przestrzeń Hilberta. Rozważmy przestrzeń liniową $\mathcal{A} = \mathbb{C}[G]$ (skończone kombinacje liniowe elementów grupy). Definiujemy na niej formę półtoraliniową:

$$\langle f_1, f_2 \rangle_\phi := \sum_{x, y \in G} f_1(x) \overline{f_2(y)} \phi(y^{-1}x).$$

Z założenia o dodatniej określoności ϕ , forma ta jest dodatnio określona (choć może być zdegenerowana), tzn. $\langle f, f \rangle_\phi \geq 0$.

Krok 2: Iloraz i uzupełnienie. Rozważmy zbiór wektorów o zerowej długości (jądro formy):

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{A} : \langle f, f \rangle_\phi = 0\}.$$

Dzięki nierówności Cauchy'ego-Schwarza $\mathcal{N}$ jest podprzestrzenią liniową. Tworzymy przestrzeń ilorazową $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. Na tej przestrzeni forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ staje się iloczynem skalarnym. Przestrzeń Hilberta H_ϕ otrzymujemy poprzez uzupełnienie $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ w normie zadanej przez ten iloczyn.

Krok 3: Definicja reprezentacji. Definiujemy działanie grupy G na $\mathcal{A}$ przez lewe przesunięcie:

$$(\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x).$$

Należy sprawdzić, czy działanie to jest unitarne względem naszej formy i czy zachowuje podprzestrzeń $\mathcal{N}$.

$$\langle \lambda(g)f, \lambda(g)f \rangle_\phi = \sum_{x, y} f(g^{-1}x) \overline{f(g^{-1}y)} \phi(y^{-1}x)$$

$$\text{Podstawiamy } x' = g^{-1}x, y' = g^{-1}y \implies y^{-1}x = y'^{-1}g^{-1}gx' = y'^{-1}x'$$

$$= \sum_{x', y'} f(x') \overline{f(y')} \phi(y'^{-1}x') = \langle f, f \rangle_\phi.$$

Zatem operator jest izometryczny, więc $\pi_\phi(g)$ jest dobrze określonym operatorem unitarnym na H_ϕ .

Krok 4: Wektor cykliczny. Niech $\delta_e \in \mathbb{C}[G]$ będzie funkcją równą 1 w elemencie neutralnym e i 0 w p.p. Niech $\xi_\phi = [\delta_e]$ będzie klasą tego elementu w H_ϕ . Obliczmy współczynnik macierzowy:

$$\begin{aligned}\langle \pi_\phi(g)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle &= \langle \lambda(g)\delta_e, \delta_e \rangle_\phi \\ &= \sum_{x,y} \delta_e(g^{-1}x) \overline{\delta_e(y)} \phi(y^{-1}x).\end{aligned}$$

Suma jest niezerowa tylko dla $y = e$ oraz $g^{-1}x = e \implies x = g$. Wtedy $y^{-1}x = e^{-1}g = g$.

$$= 1 \cdot 1 \cdot \phi(g) = \phi(g).$$

Wektor ξ_ϕ jest cykliczny, ponieważ jego przesunięcia $\lambda(g)\delta_e = \delta_g$ rozpinają całą algebrę $\mathbb{C}[G]$, która jest gęsta w H_ϕ . $\square$