

Teoria reprezentacji grup

Notatki

1. Grupy dyskretne i grupy zwarte

Przyjmijmy, że definicja grupy jest znana. W notatkach będziemy rozważali grupy dyskretne jak również grupy topologiczne zwarte, których definicję warto przytoczyć.

Definicja 1.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, dodatkowo na G określona jest topologia. G jest **grupą topologiczną**, jeśli działania:

- $\cdot : (x, y) \rightarrow x \cdot y$,
 - $\text{inv} : x \rightarrow x^{-1}$
- są ciągłe w topologii G .

Przykład 1.1. Grupami topologicznymi są:

- grupa liczb rzeczywistych z dodawaniem $(\mathbb{R}, +)$,
- grupa liczb rzeczywistych bez zera z mnożeniem $(\mathbb{R}^+, \cdot)$,
- grupy macierzowe $SO(n), O(n), SU(n), U(n), GL(n)$ z działaniem mnożenia macierzy.

W dalszych rozważaniach będą nas interesować grupy topologiczne zwarte.

Definicja 1.2. Grupę topologiczną G nazywamy grupą **(lokalnie) zwartą**, jeśli G jest (lokalnie) zwarta jako przestrzeń topologiczna.

Przykład 1.2. Następujące grupy nie są grupami zwartymi:

- nieskończone grupy dyskretne (grupa dyskretna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest skończona),
- grupy $(\mathbb{R}^n, +)$,
- grupa macierzowa $GL(n)$.

Przykład 1.3. Następujące grupy są zwarte w topologii $\mathbb{C}^{n^2}$:

- $U(n)$ - macierze unitarne. Kolumny mają długość 1, więc zbiór $U(n)$ zawiera się w kuli o promieniu n . Ponadto $U(n)$ można zapisać jako

$$\{A = (v_1, \dots, v_n) : \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\} \subset \mathbb{C}^{n^2}.$$

Iloczyn skalarny jest ciągły na $\mathbb{C}^{n^2}$, więc powyższy zbiór jest domknięty. Domknięte i ograniczone podzbiory $\mathbb{C}^{n^2}$ są zwarte.

- $SU(n)$ - macierze unitarne o wyznaczniku 1. Jest to podzbiór $U(n)$, wystarczy pokazać, że jest domknięty w $U(n)$. Zbiór $SU(n)$ jest domknięty w $U(n)$, ponieważ jest przeciwobrazem 1 przez ciągłą funkcję $\det$.
- $O(n)$ jest podzbiorem domkniętym $U(n)$, ponieważ jest przeciwobrazem zbioru 0 przez ciągłą funkcję $(x_1, \dots, x_{n^2}) \rightarrow (\Im x_1, \dots, \Im x_{n^2})$.
- $SO(n)$ jest podzbiorem $SU(n)$ będącym przeciwobrazem zbioru 0 przez funkcję jak poprzednio.

Na grupach lokalnie zwartych istnieje pewna miara o szczególnych własnościach.

Definicja 1.3. *Lewą (prawą) miarą Haara nazywamy miarę μ o własnościach:*

1. *miara dowolnego zbioru zwartego jest skończona,*
2. *jest zewnętrźnie regularna, tj. miarę zbioru można przybliżać przez miary zbiorów borelowskich otwartych zawierających ten zbiór,*
3. *jest wewnętrźnie regularna, tj. miarę zbioru można przybliżać przez miary zbiorów zwartych w nim zawartych,*
4. *Jest niezmiennicza na lewe (prawe) przesunięcia, tzn:*

$$\mu(aS) = \mu(S) \quad \forall a \in G, S \subset G.$$

Prawdziwe jest twierdzenie o istnieniu miary Haara na lokalnie zwartych grupach.

Twierdzenie 1.1. *Na lokalnie zwartej grupie istnieje z dokładnością do mnożenia przez skalar lewa (prawa) miara Haara.*

Przykład 1.4. Miarami Haara na grupach są:

- na grupie $(\mathbb{R}^n, +)$ miarami Haara są krotności miary Lebesgue'a,
- na grupie $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ miarami Haara są krotności

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{|t|} dt.$$

Jeśli grupa G jest zwarta, to miara całej przestrzeni jest skończona (wewnętrzna regularność), mamy więc jednoznaczność.

Twierdzenie 1.2. *Na grupie zwartej istnieje jedyna lewa (prawa) probabilistyczna miara Haara.*

Możemy się zastanawiać, czy lewe i prawe miary Haara na grupie G pokrywają się z dokładnością do skalarnego czynnika.

Definicja 1.4. *Grupa G jest **unimodularna**, gdy każda lewa i prawa miara Haara pokrywają się z dokładnością do stałego czynnika.*

Nie każda grupa jest unimodularna, można podać przykłady takich grup lokalnie zwartych.

Przykład 1.5. Rozważmy grupę "ax+b", która jest grupą przekształceń liniowych postaci

$$\{ax + b : a > 0, b \in \mathbb{R}\}$$

ze składaniem przekształceń. Grupa ta jest izomorficzna z grupą macierzy postaci

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Izomorfizm między tymi grupami jest zadany w kanoniczny sposób. Wyliczmy lewą miarę Haara. Liczymy

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay + b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Szukamy tej miary jako miary z gęstością, czyli postaci $f(x, y)dxdy$ dla pewnej funkcji f . Zatem musi być

$$f(x, y)dxdy = f(ax, ay + b)a^2dxdy.$$

Funkcją spełniającą ten warunek jest $f(x, y) = \frac{1}{x^2}$. Wyliczamy prawą miarę Haara. Liczymy

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & bx + y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Szukamy tej miary jako miary z gęstością, czyli postaci $g(x, y)dxdy$ dla pewnej funkcji g . Zatem musi być

$$g(x, y)dxdy = g(ax, bx + y)adxdy$$

Funkcją spełniającą ten warunek jest $g(x, y) = \frac{1}{x}$. Nie zachodzi równość $f(x, y) = Kg(x, y)$ dla żadnej stałej K , zatem grupa nie jest unimodularna.

Bardzo często zdarza się to, że grupa jest unimodularna, wystarczy zażądać, aby była np. abelowa lub zwarta.

Twierdzenie 1.3. *Jeśli grupa jest zwarta, to jest unimodularna.*

Dowód. Niech μ będzie lewą probabilistyczną miarą Haara. Rozważmy miarę $\mu^g(A) = \mu(Ag)$. Jest to lewa miara Haara, więc $\mu^g = \delta(g)\mu$ dla pewnej stałej g . Sprawdzamy, że $\delta(gh) = \delta(g)\delta(h)$. Ponadto δ jest ciągła, ponieważ

$$\delta(g) = \mu^g(G)/\mu(G) = \mu^g(G).$$

Miara Haara jest ciągła, więc δ jest ciągłe. Czyli mamy homomorfizm

$$\delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Zauważamy, że G jest unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy δ jest stałe równa jeden. Jeśli G jest zwarta, to $\delta(G)$ jest zwartą podgrupą $\mathbb{R}_+$, czyli musi być trywialna. $\square$

Miara Haara jest przydatna do całkowania po grupie.

Definicja 1.5. Całkę z funkcji $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ względem miary Haara oznaczamy

$$\int_G f(g) d_g.$$

Uwaga 1.1. Jeśli grupa jest skończona, to całka z funkcji f względem probabilistycznej miary Haara wynosi

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

2. Reprezentacje liniowe grup

2.1. Definicja i podstawowe fakty

Wprowadzimy kluczowe pojęcie dla teorii reprezentacji.

Definicja 2.1. *Reprezentacją liniową grupy G nazywamy odwzorowanie $\pi : G \rightarrow GL(V)$ takie, że*

$$\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1) \pi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Wymiarem reprezentacji nazywamy wymiar przestrzeni V .

Przykład 2.1. Niech $G = \mathbb{Z}_n$. Wtedy $\pi_1(k) = e^{2\pi i k/n}$ jest reprezentacją, także $\pi_2(k) = \begin{bmatrix} e^{2\pi i k/n} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i k/n} \end{bmatrix}$ jest reprezentacją.

Szczególnie ważną klasę reprezentacji stanowią tzw. reprezentacje nieprzywiedlne.

Definicja 2.2. Niech π będzie reprezentacją. Podprzestrzeń domkniętą $V_0 < V$ nazywamy **niezmienniczą**, gdy $\pi(g)V_0 \subset V_0$ dla każdego $g \in G$.

Definicja 2.3. Reprezentację π nazywamy **nieprzywiedlną**, gdy jedynymi jej podprzestrzeniami niezmienniczymi są przestrzenie $\{0\}$ i V .

Przykład 2.2. Reprezentacja π_1 z przykładu 2.1 jest nieprzywiedlna, reprezentacja π_2 jest przywiedlna.

Definicja 2.4. Wektor v nazywamy **cyklicznym**, gdy podprzestrzeń

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j \pi(g_j) V : g_j \in G : N = 1, 2, \dots \right\}$$

jest całą przestrzenią V .

Fakt 2.1. Reprezentacja π jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $v \in V$ jest cykliczny.

Definicja 2.5. Dwie reprezentacje $\pi_1 = (G, V_1)$ i $\pi_2 = (G, V_2)$ są **równoważne**, jeśli:

- istnieje izomorfizm $\phi : V_1 \rightarrow V_2$,
- dla każdego $g \in G$ mamy $\phi^{-1} \pi_2(g) \phi = \pi_1(g)$.

Jeśli dwie reprezentacje są równoważne, to traktujemy je tak, jakby były identyczne, dlatego czasami mówimy o klasie abstrakcji reprezentacji $[\pi]$.

Definicja 2.6. Reprezentację nazywamy **unitarną**, gdy wszystkie operatory $\pi(g)$ są unitarne.

Dzięki kolejnemu twierdzeniu możemy ograniczyć rozważane przez nas reprezentacje do reprezentacji unitarnych.

Twierdzenie 2.1. Dla każdej reprezentacji π na przestrzeni Hilberta istnieje równoważna reprezentacja $\tilde{\pi}$, która jest unitarna.

Dowód. Wprowadzimy nowy iloczyn skalarny na V

$$[v, w] = \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle d_g.$$

Sprawdźmy, że jest to iloczyn skalarny: półtoraliniowość jest oczywista, warunek niezerowania się na niezerowych wektorach wynika z ciągłości iloczynu skalarnego (miara Haara ma tę własność, że $\mu(A) > 0$ dla otwartego A).

Sprawdźmy, że w tym iloczynie skalarnym reprezentacja π jest unitarna. Liczymy:

$$[\pi(x)v, \pi(x)w] = \int_G \langle \pi(g)\pi(x)v, \pi(g)\pi(x)w \rangle d_g = \int_G \langle \pi(gx)v, \pi(gx)w \rangle d_g = \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle d_g = [v, w].$$

□

Każdą reprezentację będziemy próbować rozłożyć na "sumę" reprezentacji nieprzywiedlnych. W tym celu zdefiniujemy sumę prostą reprezentacji.

Definicja 2.7. Sumą prostą reprezentacji $\pi_1 = (G, V_1)$ i $\pi_2 = (G, V_2)$ nazywamy reprezentację $\pi_1 \oplus \pi_2 = (G, V_1 \oplus V_2)$ zdefiniowaną następująco:

$$\pi_1 \oplus \pi_2(g) = (\pi_1(g), \pi_2(g)).$$

Aby rozkładać reprezentację na sumę reprezentacji nieprzywiedlnych potrzebujemy lematu.

Lemat 2.1. Jeśli V_0 jest podprzestrzenią niezmienniczą reprezentacji, to $V_0^\perp$ też jest podprzestrzenią niezmienniczą.

Dowód. Niech $v \in V_0$, $w \in V_0^\perp$. Pokażemy, że jeśli $[v, w] = 0$, to także $[v, \pi(g)w] = 0$. Mamy

$$[v, \pi(g)w] = [\pi^*(v), w] = [\pi^{-1}(g)v, w] = [\pi(g^{-1})v, w] = 0.$$

□

Wniosek 2.1. Każdą reprezentację można rozłożyć na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

Dowód. Stosujemy indukcję i poprzedni lemat.

□

2.2. Reprezentacje ciągłe grup

Definicja 2.8. Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta, G będzie grupą topologiczną. **Reprezentacją** $(\pi, \mathcal{H})$ tej grupy nazywamy odwzorowanie $\pi : G \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ spełniające:

- (i) dla dowolnych $g, h \in G$ mamy $\pi(g)\pi(h) = \pi(gh)$,
- (ii) odwzorowanie π jest ciągle w mocnej operatorowej topologii.

Ostatni warunek możemy zastąpić innymi, pokazuje to kolejny lemat.

Lemat 2.2. Niech π będzie odwzorowaniem unitarnym spełniającym warunek (i) z definicji 2.8. Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (i) odwzorowanie π jest ciągle w mocnej operatorowej topologii, tzn. dla dowolnego ξ i $g_n \rightarrow g$ mamy

$$\pi(g_n)\xi \rightarrow \pi(g)\xi.$$

- (ii) odwzorowanie π jest ciągle w słabej topologii operatorowej, tzn. dla dowolnych ξ, η i $g_n \rightarrow g$ mamy

$$\langle \pi(g_n)\xi, \eta \rangle \rightarrow \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle.$$

- (iii) odwzorowanie $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ dane jako

$$\phi(g) = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$$

jest ciągle.

Dowód. Implikacje (i) $\Rightarrow$ (ii) i (ii) $\Rightarrow$ (iii) są oczywiste. Pozostaje do pokazania implikacja (iii) $\Rightarrow$ (i). Rozważmy normę różnicy

$$\|\pi(g)\xi - \pi(h)\xi\|^2 = \|\xi\|^2 + \|\xi\|^2 - 2\Re \langle \pi(g)\xi, \pi(h)\xi \rangle = 2\|\xi\|^2 - 2\Re \langle \pi(h^{-1}g)\xi, \xi \rangle \rightarrow 0.$$

□

2.3. Przykłady reprezentacji

W tym rozdziale podamy kilka ważnych reprezentacji grup pojawiających się często w teorii.

2.3.1. Reprezentacja trywialna

Rozważmy reprezentację (π_0, V) gdzie V jest dowolną przestrzenią liniową (Hilberta) zdefiniowaną jako

$$\pi_0(g) = I$$

dla każdego $g \in G$. Sprawdzamy, że rzeczywiście jest to reprezentacja. Każda grupa taką reprezentację ma. Dodatkowo, jeśli $\dim V = 1$, to jest to reprezentacja nieprzywiedlna, nazywamy ją wtedy **reprezentacją trywialną**.

2.4. Reprezentacja signum

Wiemy, że każda grupa G jest izomorficzna z pewną podgrupą $Sym(X)$ (grupą permutacji zbioru X). Grupa $Sym(G)$ (czyli każda grupa) ma reprezentację zwaną **reprezentacją signum** $(\pi, \mathbb{R})$ zdefiniowaną jako

$$\pi(g) = \text{sgn}(g).$$

2.5. Lewa i prawa regularna

Niech $x \in G$. Wtedy λ_x zdefiniowana jako

$$(\lambda(x)f)(y) = f(xy)$$

jest reprezentacją algebry Frobeniusa (patrz kolejny rozdział) nazywaną **lewą regularną**. Możemy sprawdzić, że rzeczywiście jest to reprezentacja

$$\lambda(x)\lambda(y)f(z) = f(xyz) = \lambda(xy)f(z).$$

Analogicznie możemy zdefiniować reprezentację **prawą regularną**

$$\rho(x)f(y) = f(yx).$$

3. Algebry Frobeniusa

Definicja 3.1. *Algebra grupowa grupy G nad ciałem K to*

$$K[G] = \{f : G \rightarrow K : \text{supp } f \text{ -skończony}\}.$$

Na algebrze grupowej mamy określone:

- dodawanie i mnożenie razy skalar,
- mnożenie, które jest splotem

$$f_1 \star f_2(x) = \sum_{y \in G} f_1(xy^{-1})f_2(y),$$

- inwolucję jako $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$.

Bazę algebry grupowej stanowią delty Diraca δ_x dla wszystkich $x \in G$, czyli takie funkcje, że

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y = x, \\ 0 & \text{dla } y \neq x. \end{cases}$$

Splot $\delta_x \star \delta_y$ jest funkcją δ_{xy} , sprawdzamy:

$$\delta_x \star \delta_y(z) = \sum_{g \in G} \delta_x(zg^{-1})\delta_y(g) = \delta_x(zy^{-1})\delta_y(y) = \delta_x(zy^{-1}) = \delta_{xy}(z)$$

Definicja 3.2. *Na algebrze grupowej istnieje **funkcjonał śladowy** zdefiniowany jako*

$$\text{Tr}(f) = f(e).$$

Twierdzenie 3.1. Funkcjonał śladowy ma własność $\text{Tr}(f \star g) = \text{Tr}(g \star f)$.

Dowód. Wystarczy sprawdzić na bazie, ponieważ splot i Tr są liniowe. Mamy

$$\text{Tr}(\delta_x \star \delta_y) = \text{Tr}(\delta_{xy}) = \delta_{xy}(e) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x = y^{-1}, \\ 0 & \text{jeśli } x \neq y^{-1}. \end{cases}$$

Analogiczne obliczenia przeprowadzamy dla $\text{Tr}(\delta_y \star \delta_x)$. □

Przez analogię możemy zdefiniować reprezentację algebry grupowej.

Definicja 3.3. $\star$ -**Reprezentacja algebry** $(\mathcal{A}, +, \star, *)$ z inwolucją to homomorfizm

$$\tilde{\pi} : \alpha \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Uwaga 3.1. Dla przestrzeni Hilberta dodawanie to dodawanie operatorów, mnożenie to składanie, inwolucja to sprzężenie.

Okazuje się, że mamy odpowiedniość między reprezentacjami grupy a reprezentacjami algebry grupowej.

Twierdzenie 3.2. Dla każdej reprezentacji π grupy G na przestrzeni liniowej V $\tilde{\pi}$ zdefiniowane jako

$$\tilde{\pi}(f) = \sum_{g \in G} f(g) \pi(g)$$

jest reprezentacją algebry grupowej. Na odwrót, jeśli $\tilde{\pi}$ jest reprezentacją algebry grupowej, to

$$\pi(g) = \tilde{\pi}(\delta_g)$$

jest reprezentacją grupy G .

Dowód. Należy sprawdzić trzy własności $\star$ -reprezentacji algebry grupowej:

- Homomorfizm ze względu na dodawanie jest oczywisty.
- Homomorfizm ze względu na mnożenie:

$$\begin{aligned} \pi(f) \tilde{\pi}(g) &= \left(\sum_{x \in G} f(x) \pi(x) \right) \left(\sum_{y \in G} g(y) \pi(y) \right) = \sum_{x, y \in G} f(x) g(y) \pi(xy) = \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(xy^{-1}) g(y) \pi(x) = \pi(\tilde{f} \star g). \end{aligned}$$

- Inwolucja. Należy pokazać, że $\tilde{\pi}(f^*) = \tilde{\pi}(g)^*$. Zapisujemy

$$\begin{aligned} f^* &= \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \delta_{g^{-1}} \\ \tilde{\pi}(f^*) &= \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \pi(g^{-1}) = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \pi(g)^* = \\ &= \left[\sum_{g \in G} f(g) \pi(g) \right]^* = [\tilde{\pi}(g)]^* \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 3.3. *Jeśli reprezentacja grupy π jest nieprzywiedlna, to odpowiadająca jej reprezentacja algebry także. Na odwrót: jeśli reprezentacja algebry jest nieprzywiedlna, to grupy także.*

Dowód. Sprawdzamy, że każdy wektor jest cykliczny. Gdyby reprezentacja algebry miała podprzestrzeń niezmienniczą, to byłaby to podprzestrzeń niezmiennicza dla

$$\{\tilde{\pi}(\delta_g) : g \in G\},$$

czyli byłaby niezmiennicza dla π . Odwrotnie, jeśli π miałaby podprzestrzeń niezmienniczą, to z definicji reprezentacji $\tilde{\pi}$ algebry byłaby to podprzestrzeń niezmiennicza także dla reprezentacji algebry. □

4. Lemat Schura

4.1. Wersja skończenie wymiarowa

Sformułujemy (w kilku wersjach) lemat przydatny w dowodzeniu twierdzeń z teorii reprezentacji.

Twierdzenie 4.1. Lemat Schura, wersja I *Załóżmy, że π jest nieprzywiedlną reprezentacją algebry grupy G (skończenie wymiarową). Jeśli operator A komutuje ze wszystkimi operatorami ze zbioru $\{\pi(g) : g \in G\}$, to jest homotetią (jest postaci cI dla pewnego c).*

Dowód. Rozważmy relację $A\pi(g) = \pi(g)A$, sprzęgamy ją obustronnie, dostajemy $A^*\pi(g) = \pi(g)A^*$. Zatem operator $B = \frac{A + A^*}{2}$ jest samosprężony i spełnia relacje komutacji. Operator samosprężony ma wektor własny odpowiadający wartości własnej λ . Sprawdzamy, że przestrzeń rozpięta przez wektory własne odpowiadające wartości własnej λ tworzą podprzestrzeń niezmienniczą. Istotnie, jeśli v jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ , to

$$Bv = \lambda v$$

$$\pi(g)Bv = \lambda\pi(g)v = B\pi(g)v$$

Czyli $\pi(g)v$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ . Z nieprzywiedlności przestrzeni ta jest albo zerowa (co wykluczyliśmy) albo jest całą przestrzenią. Jest całą przestrzenią, zatem $B = \lambda I$. Podobnie robimy dla operatora samosprężonego $C = \frac{A - A^*}{2i}$. Czyli $A = cI$. □

Twierdzenie 4.2. Lemat Schura, wersja II *Jeśli π_1, π_2 są dwiema nieprzywiedlnymi reprezentacjami i istnieje takie T , że*

$$T\pi_1(g) = \pi_2(g)T$$

dla każdego $g \in G$, to $T \equiv 0$ albo π_1, π_2 są równoważne.

Dowód. Sprzęgamy relację $T\pi_1(g) = \pi_2(g)T$, dostajemy $T^*\pi_1(g) = \pi_2(g)T^*$, stąd

$$TT^*\pi_1(g) = T\pi_2(g)T^* = \pi_1(g)TT^*.$$

Podobnie dla T^*T . Z poprzedniego lematu $T^*T = TT^* = cI$ (dlaczego to samo c -patrz kolejny dowód), czyli

$$S = c^{-1/2}T$$

jest unitarny (z dodatniości TT^* liczba $c > 0$). Dalej

$$S\pi_1(g) = \pi_2(g)S$$

$$S\pi_1(g)S^{-1} = \pi_2(g),$$

gdzie S jest liniowym izomorfizmem. Stąd równoważność (unitarna) reprezentacji. $\square$

Wniosek 4.1. Każda nieprzywiedlna reprezentacja grupy abelowej jest jednowymiarowa.

4.2. Wersja nieskończenie wymiarowa

Możemy pokazać też nieskończenie wymiarową wersję lematu Schura. Nie da się bezpośrednio przepisać dowodu, ponieważ ograniczony operator na przestrzeni Hilberta nieskończenie wymiarowej może nie mieć wartości własnej. Jednakże, jeśli zamiast istnienia wartości własnej wykorzystamy twierdzenie spektralne, to da się udowodnić lemat Schura.

Twierdzenie 4.3. (Lemat Schura, wersja nieskończenie wymiarowa) *Jeśli $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ jest ograniczony, $(\pi_1, \mathcal{H}), (\pi_2, \mathcal{H})$ są dwiema nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy topologicznej oraz*

$$B\pi_2(g) = \pi_2(g)B$$

To $B \equiv 0$ lub reprezentacje są równoważne.

Dowód. Podobnie jak w skończenie wymiarowej wersji lematu mamy

$$BB^*\pi_1(g) = \pi_1(g)BB^*,$$

gdzie BB^* jest normalny i dodatnio określony. Istnieje więc rozkład spektralny

$$BB^* = \int_{\sigma(B)} \lambda dE(\lambda).$$

Z twierdzenia spektralnego komutowanie z BB^* jest równoważne komutowaniu z $E(\lambda)$. Dla każdego λ podprzestrzeń $E(\lambda)\mathcal{H}$ jest niezmiennicza i domknięta (jako, że $E(\lambda)$ jest projektorem ortogonalnym), zatem $E(\lambda) \equiv 0$ lub $E(\lambda) = I$. Stąd ponieważ

$$0 \leq E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2) \leq I$$

dla $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Zatem $BB^* = cI$. B jest ograniczonym operatorem, jest "na", ponadto pokazujemy, że jest "1-1":

$$c\|x\|^2 = \langle BB^*x, x \rangle = \langle B^*x, B^*x \rangle = \|Bx\|^2,$$

stąd $Bx = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Zatem B jest odwracalny i jego odwrotność jest równa $\frac{1}{c}B^*$. Zatem operator

$$S = \frac{1}{\sqrt{c}}B$$

jest unitarny, co dowodzi unitarnej równoważności reprezentacji π_1 i π_2 . $\square$

5. Iloczyn tensorowy przestrzeni i reprezentacji na przestrzeni Hilberta

5.1. Iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta

W tym rozdziale w ograniczonym zakresie pokażemy elementy teorii tensorów potrzebne do dalszych rozważań. Załóżmy, że mamy dwie przestrzenie Hilberta $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$. Możemy je utożsamiać z przestrzeniami ℓ^2 nad pewnymi zbiorami X_1, X_2 . Wtedy mamy:

$$\ell^2(X_1) \otimes \ell^2(X_2) := \ell^2(X_1 \times X_2)$$

Następnie definiujemy **podstawowe elementy (tensory proste)** iloczynu tensorowego, są to

$$f_1 \otimes f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2).$$

Każdą funkcję z $\ell^2(X_1 \times X_2)$ można zapisać jako kombinację liniową skończenie wielu tensorów prostych (uwaga - nie ma tu jednoznaczności). Na $\ell^2(X_1 \times X_2)$ zadajemy też iloczyn skalarny (na tensorach prostych) jako

$$\langle f_1 \otimes f_2, h_1 \otimes h_2 \rangle := \langle f_1, h_1 \rangle \langle f_2, h_2 \rangle.$$

Na ogólne funkcje przedłużamy ten iloczyn liniowo. Można pokazać, że rzeczywiście definiuje to iloczyn skalarny.

Twierdzenie 5.1. *Jeśli $\dim \mathcal{H}_1, \dim \mathcal{H}_2 < \infty$ i $\{e_j\}_{j=1}^n, \{f_j\}_{j=1}^m$ stanowią bazy ON, to*

$$\{e_j \otimes f_k : j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m\}$$

stanowi bazę ON $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Dowód. Sprawdzamy relacje ON z definicji iloczynu skalarnego. □

5.2. Iloczyn tensorowy operatorów

Aby zdefiniować iloczyn tensorowy reprezentacji potrzebujemy zdefiniować iloczyn tensorowy operatorów na przestrzeni Hilberta, w skończenie wymiarowej sytuacji iloczyn tensorowy macierzy.

Definicja 5.1. *Założmy, że mamy dwa operatory*

$$T_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1,$$

$$T_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2.$$

Definiujemy operator $T_1 \otimes T_2$ jako

$$T_1 \otimes T_2 : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2,$$

$$T_1 \otimes T_2(x \otimes y) = (T_1 x) \otimes (T_2 y).$$

Przykład 5.1. Jeśli $T_1 = (a_{ij})$ jest macierzą $n \times n$, T_2 jest macierzą (b_{ij}) wymiarów $m \times m$, to $T_1 \otimes T_2$ jest następującą macierzą:

$$T_1 \otimes T_2 = \begin{bmatrix} a_{11}T_2 & a_{12}T_2 \cdots & a_{1n}T_2 \\ a_{21}T_2 & \ddots & \\ a_{n1}T_2 & \cdots & a_{nn}T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}T_1 & b_{12}T_1 \cdots & b_{1m}T_1 \\ b_{21}T_1 & \ddots & \\ b_{m1}T_1 & \cdots & b_{mm}T_1 \end{bmatrix}$$

Przykład 5.2. Jeśli mamy dwie następujące macierze 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix},$$

to ich iloczyn tensorowy wyliczamy następująco

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & 6 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ 7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & 8 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 6 & 12 \\ 15 & 20 & 18 & 24 \\ 7 & 14 & 8 & 16 \\ 21 & 28 & 24 & 32 \end{bmatrix}.$$

Iloczyn tensorowy operatorów ma wiele przydatnych w zastosowaniach własności, poniżej kilka z nich.

Fakt 5.1. Iloczyn tensorowy dla operatorów T_1, T_2, T_3, T_4 ma następujące własności:

1. addytywność $(T_1 + T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes T_3 + T_2 \otimes T_3$,
2. mnożenie przez skalar $\forall \alpha \in \mathbb{C} (\alpha T_1) \otimes T_2 = T_2 \otimes (\alpha T_2) = \alpha(T_1 \otimes T_2)$,
3. składanie operatorów $(T_1 \otimes T_2)(T_3 \otimes T_4) = (T_1 T_3) \otimes (T_2 T_4)$.

6. Relacje ortogonalności współczynników reprezentacji unitarnych

6.1. Algebra Fouriera-Stieltjesa

W tym rozdziale pokażemy, jakie znaczenie mają reprezentacje nieprzywiedlne i dlaczego akurat tę klasę reprezentacji się wyróżnia.

Definicja 6.1. Niech G będzie grupą. Definiujemy *dualną* do G jako

$$\hat{G} = \{[\pi] : \pi - \text{reprezentacje nieprzywiedlne unitarne grupy } G\}.$$

Rozważmy teraz dowolną reprezentację unitarną nieprzywiedlną π grup G . Poszczególne macierze $\pi(g)$ z tej reprezentacji mają postać

$$\pi(g) = (D_{ij}^\pi(g))_{i,j=1}^{d(\pi)},$$

gdzie $D_{ij}^\pi(g)$ będą odgrywać ważną rolę w dalszych rozważaniach.

Definicja 6.2. *Współczynnikami reprezentacji π grupy G nazywamy funkcje $G \rightarrow \mathbb{C}$ zdefiniowane jako*

$$D_{ij}^\pi = \langle \pi(g)e_i, e_j \rangle.$$

Algebrą Fouriera-Stieltjesa nazywamy przestrzeń liniową rozpiętą na współczynnikach reprezentacji z $\hat{G}$, oznaczamy ją przez $\mathcal{B}(G)$.

O algebrze Fouriera-Stieltjesa możemy myśleć jako o przestrzeni "uogólnionych wielomianów trygonometrycznych". Uzasadnienie tej interpretacji można zobaczyć w przykładach.

Przykład 6.1. Rozważmy grupę $(\mathbb{Z}, +)$. Jest to grupa abelowa, więc wszystkie reprezentacje unitarne są jednowymiarowe, więc są postaci

$$\pi_t(n) = e^{itn}.$$

Sprawdzamy, że $\mathcal{B}(G)$ to w tym wypadku wielomiany trygonometryczne, zbiór $\hat{G}$ to

$$\hat{G} = \{\pi_t : t \in \mathbb{R}\}.$$

Przykład 6.2. Rozważmy grupę $(\mathbb{R}, \cdot)$. Jej reprezentacje unitarne nieprzywiedlne ciągłe są postaci

$$\pi_t(x) = e^{itx}.$$

Możemy sprawdzić, że są to jedyne reprezentacje nieprzywiedlne: ustalamy wartość $\pi(1)$, na tej podstawie kolejno wnioskujemy jakie muszą być $\pi(n)$ i $\pi(n/m)$ dla całkowitych n, m . Następnie z ciągłości pozostałe wartości.

Algebra Fouriera-Stieltjesa ma dodatkową, ważną własność.

Twierdzenie 6.1. *Algebra Fouriera-Stieltjesa jest algebrą na mnożenie punktowe, tzn*

$$D_{ij}^{\pi_1} \cdot D_{kl}^{\pi_2}(x) = \sum_{\pi_1 \hat{G}_s, t \in \mathbb{N}} \alpha_{s,t,\pi} D_{st}^\pi(x)$$

dla każdego $x \in G$. Mnożenie to mnożenie punktowe funkcji $f \cdot g(x) = f(x)g(x)$.

Aby udowodnić to twierdzenie wykorzystamy iloczyn tensorowy reprezentacji.

Definicja 6.3. *Iloczynem tensorowym reprezentacji $(\pi, V), (\sigma, W)$ nazywamy reprezentację $(\pi \otimes \sigma, V \otimes W)$ zdefiniowaną jako*

$$\pi \otimes \sigma(g) = \pi(g) \otimes \sigma(g).$$

Z własności (3) z faktu 5.1 mamy, że iloczyn tensorowy reprezentacji jest reprezentacją, ponieważ

$$\begin{aligned} \pi \otimes \sigma(g) \pi \otimes \sigma(h) &= \pi(g) \otimes \sigma(g) \pi(h) \otimes \sigma(h) = \\ &= (\pi(g)\pi(h)) \otimes (\sigma(g)\sigma(h)) = \pi(gh) \otimes \sigma(gh) = \pi \otimes \sigma(gh). \end{aligned}$$

Ponadto możemy sprawdzić, że iloczyn tensorowy reprezentacji unitarnych reprezentacji unitarnych jest reprezentacją unitarną.

$$\begin{aligned}\langle \pi \otimes \sigma(g)(x \otimes y), \pi \otimes \sigma(g)(z \otimes t) \rangle &= \langle \pi(g)x \otimes \sigma(g)y, \pi(g)z \otimes \sigma(g)t \rangle = \\ &= \langle \pi(g)x, \pi(g)z \rangle \langle \sigma(g)y, \sigma(g)t \rangle = \langle x, y \rangle \langle z, t \rangle = \langle x \otimes y, z \otimes t \rangle\end{aligned}$$

Analogiczna własność nie zachodzi dla nieprzywiedlności: iloczyn tensorowy reprezentacji nieprzywiedlnych jest z reguły reprezentacją przywiedlną. Możemy wrócić do zasadniczego dowodu twierdzenia 6.1.

Dowód. Obliczamy

$$D_{ij}^{\pi_1} D_{kl}^{\pi_2}(g) = \langle \pi_1(g)e_i, e_j \rangle \langle \pi_2(g)e_k, e_l \rangle = \langle \pi_1(g)e_i \otimes \pi_2(g)e_k, e_j \otimes e_l \rangle.$$

Wynik to współczynnik pewnej reprezentacji unitarnej (niekoniecznie nieprzywiedlnej). Jednakże, reprezentacja ta rozkłada się na reprezentacje nieprzywiedlne, więc jest to kombinacja liniowa współczynników reprezentacji nieprzywiedlnych. $\square$

6.2. Twierdzenia o ortogonalności i zupełności współczynników macierzowych

Przejdźmy teraz do dowodu jednego z najważniejszych twierdzeń teorii reprezentacji.

Twierdzenie 6.2. *Jeśli α, β są skończone wymiarowymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi unitarnymi grupy G , to*

$$\int_G \overline{D_{ij}^\alpha(x)} D_{kl}^\beta(x) dx = \frac{1}{d(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Dowód. Niech B będzie operatorem $B : \mathbb{C}^{d(\beta)} \rightarrow \mathbb{C}^{d(\alpha)}$. Określmy

$$\tilde{B} = \int_G \beta(x) B \alpha(x^{-1}) dx.$$

Chcemy skorzystać z lematu Schura. Istotnie

$$\begin{aligned}\beta(y) \tilde{B} &= \int_G \beta(y) \beta(x) B \alpha(x)^{-1} dx = \int_G \beta(yx) B \alpha(x)^{-1} dx = \\ &= \int_G \beta(z) B \alpha(y^{-1}z)^{-1} dz = \int_G \beta(z) B \alpha(z)^{-1} \alpha(y) dz = \tilde{B} \alpha(y).\end{aligned}$$

Z lematu Schura (wersja II) mamy, że $B = cI$, gdzie $c = 0$ jeśli $\alpha \neq \beta$ oraz

$$c = \frac{1}{d(\alpha)} \operatorname{Tr} B,$$

zatem

$$\tilde{B} = \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{d(\alpha)} \operatorname{Tr} B$$

Dobieramy $B = \delta_{jk} \delta_{kj}$, wtedy $\operatorname{Tr} B = \delta_{ik} \delta_{jl}$, jak również (po wykorzystaniu tego, że α jest unitarna) $\beta(x) B \alpha(x) = \overline{D_{ij}^\alpha(x)} D_{kl}^\beta(x)$, co daje tezę. $\square$

Pokażemy, że $\mathcal{B}(G)$ jest gęsty w $\mathbb{C}[G] = L^2(G, dx)$, w tym celu skorzystamy z twierdzenia Stone’a-Weierstrassa (wersja skończenie wymiarowa).

Twierdzenie 6.3. (Stone-Weierstrass) *Niech $\mathcal{A}$ będzie podprzestrzenią liniową funkcji na zbiorze skończonym Y , wtedy jeśli*

- $\forall f, g \in \mathcal{A} : fg \in \mathcal{A}$ punktowo,
- $\mathcal{A}$ rozdziela punkty

to $\mathcal{A}$ stanowi wszystkie funkcje na Y .

Uwaga 6.1. W nieskończenie wymiarowej wersji twierdzenia Stone’a-Weierstrassa potrzebujemy dodatkowo, aby $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$, ale to w wypadku współczynników reprezentacji również to jest prawdziwe, można to pokazać przy użyciu reprezentacji sprzężonej.

Dowód. Wystarczy, że uda się zrealizować δ_x dla każdego $x \in Y$. Niech f_{xy} będzie funkcją rozdzielałą punkty $x \neq y$. Wtedy

$$\delta_x = \Pi_{x \neq y} f_{xy}.$$

□

Dla kompletności dowodu, że $\mathcal{B}(G) = \mathbb{C}[G]$ wystarczy pokazać, że zachodzi warunek (2) z twierdzenia 6.3, ponieważ (1) został już pokazany jako konkluzja rozdziału 6.1. Pokazanie, że $\mathcal{B}(G)$ rozdziela punkty kończy dowód.

Lemat 6.1. *Algebra $\mathcal{B}(G)$ rozdziela punkty.*

Dowód. Rozważmy reprezentację lewą regularną i funkcję

$$f_y(x) = \langle \lambda(x)\delta_e, \delta_y \rangle.$$

Jest ona funkcją rozdzielałą punkty x, y . Lewa regularna jest reprezentacją, czyli rozbija się na sumę reprezentacji nieprzywiedlnych, zatem f_y jest kombinacją liniową współczynników reprezentacji. □

7. Charaktery reprezentacji

Charaktery reprezentacji są bardzo przydatne w rozróżnianiu i zliczaniu reprezentacji nieprzywiedlnych, ponieważ mamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między charakterami reprezentacji a samymi reprezentacjami.

Definicja 7.1. *Charakterem reprezentacji π nazywamy funkcję $\chi_\pi : G \rightarrow \mathbb{C}$ daną wzorem*

$$\chi_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g)).$$

Definicja 7.2. *Funkcją centralną na grupie G nazywamy funkcję $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ spełniającą*

$$f(x) = f(yxy^{-1})$$

dla każdego $y \in G$.

Z własności śladu sprawdzamy, że każdy charakter jest funkcją centralną. Możemy podać użyteczne twierdzenie charakteryzacyjne dla funkcji centralnych.

Twierdzenie 7.1. Niech G będzie grupą skończoną. Następujące warunki są równoważne:

- (i) funkcja f jest centralna,
- (ii) funkcja f jest w centrum $\mathbb{C}[G]$.

Dowód. Funkcja centralna spełnia

$$\delta_y \star f(x) = f \star \delta_y(x)$$

dla każdego $y \in G$, zatem jest w centrum grupy. To pokazuje implikację z (i) do (ii). Aby pokazać implikację przeciwną z łączności spłotu wystarczy sprawdzić, że dla funkcji z centrum mamy

$$\delta_y \star f \star \delta_{y^{-1}}(x) = f(x)$$

dla każdego y , ponieważ oznacza to dokładnie warunek z definicji bycia centralnym. Ale to zachodzi, bo f jest w centrum. $\square$

Rozpatrzmy teraz podprzestrzeń funkcji centralnych w $\mathbb{C}[G]$. Pokażemy, że charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych stanowią bazę tej podprzestrzeni. W tym celu będzie potrzebny lemat.

Lemat 7.1. *Prawdziwy jest wzór*

$$\int_G D_{ij}^\pi(yxy^{-1})dy = \frac{1}{d(\pi)}\delta_{ij}\chi_\pi(x).$$

Dowód. Rozpiszemy współczynnik macierzowy pod całką i skorzystamy z relacji ortogonalności.

$$\begin{aligned} \int_G D_{ij}^\pi(yxy^{-1})dy &= \sum_{k=1}^{d(\pi)} \int_G D_{ik}^\pi(y)D_{kj}(xy^{-1})dy = \sum_{k,l=1}^{d(\pi)} \int_G D_{ik}^\pi(y)D_{kl}(x)D_{lj}^\pi(y^{-1})dy = \\ &= \sum_{k,l=1}^{d(\pi)} \int_G D_{ik}^\pi(y)D_{kl}(x)\overline{D_{jl}^\pi(y)}dy = \sum_{k,l=1}^{d(\pi)} D_{kl}(x) \int_G D_{ik}^\pi(y)\overline{D_{jl}^\pi(y)}dy = \\ &= \sum_{k,l=1}^{d(\pi)} D_{kl}(x) \frac{1}{d(\pi)}\delta_{ij}\delta_{kl} = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{d(\pi)} D_{kk}(x) = \frac{1}{d(\pi)}\delta_{ij}\chi_\pi(x). \end{aligned}$$

$\square$

Mając powyższy wzór możemy zapisać dowolną funkcję centralną w bazie złożonej z charakterów.

Twierdzenie 7.2. *Charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych stanowią bazę ortonormalną podprzestrzeni funkcji centralnych w $\mathbb{C}[G]$.*

Dowód. Ortonormalność wynika z relacji ortogonalności dla współczynników macierzowych. Sprawdzimy, że jest to układ zupełny. Niech f będzie dowolną funkcją centralną, wtedy mamy

$$f(x) = \int_G f(yxy^{-1})dy = \int_G \sum_{\pi \in \hat{G}, i, j} c_{ij}^\pi D_{ij}(yxy^{-1})dy = \sum_{i, \pi} \frac{c_{ii}^\pi}{d(\pi)} \chi_\pi(x)$$

$\square$

Wynika stąd bardzo ważny wniosek: reprezentacje unitarne są równoważne wtedy i tylko wtedy, kiedy mają takie same charaktery.

Fakt 7.1. *Niech π, σ będą dwiema reprezentacjami, wtedy:*

- $\chi_{\pi \oplus \sigma}(x) = \chi_\pi(x) + \chi_\sigma(x)$,
- $\chi_{\pi \otimes \sigma}(x) = \chi_\pi(x)\chi_\sigma(x)$.

Wniosek 7.1. *Jeśli $\pi = \bigoplus m_i \pi_i$, gdzie π_i są reprezentacjami nieprzywiedlnymi, to*

$$\langle \chi_\pi, \chi_{\pi_i} \rangle = m_i$$

Wniosek 7.2. *Rozważmy charakter odpowiadający reprezentacji lewej regularnej. Jest to*

$$\chi_\lambda(g) = \begin{cases} |G| & \text{jeśli } g = e, \\ 0 & \text{wpp,} \end{cases}$$

wtedy

$$m_i = \langle \chi_\lambda, \chi_{\pi_i} \rangle = d(\pi).$$

Stąd reprezentacja lewa regularna składa się ze wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G , każda z krotnością równą wymiarowi.

Wniosek 7.3. *Licząc długość charakteru χ_λ dostajemy wzór*

$$|G| = \sum_{\pi \in \hat{G}} d(\pi)^2.$$

Wniosek 7.4. *Powyższe liczby są równe:*

- liczba reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G ,
- wymiar podprzestrzeni funkcji centralnych,
- liczba różnych charakterów,
- liczba orbit w grupie G .

Wniosek 7.5. *Jeśli grupa jest abelowa, to ma tyle reprezentacji nieprzywiedlnych ile wynosi jej rząd.*

8. Liczby algebraiczne a teoria reprezentacji

Celem tego rozdziału będzie udowodnienie twierdzenia, że jeśli π jest nieprzywiedlna, to

$$d(\pi) | G.$$

W tym celu będziemy potrzebowali kilku lematów i wprowadzenia ogólnej teorii liczb algebraicznych.

Definicja 8.1. *Liczbą algebraiczną nazywamy liczbę, która jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych. Liczbą algebraiczną całkowitą nazywamy liczbę, która jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych i współczynniku wiodącym 1. Zbiór liczb algebraicznych całkowitych będziemy oznaczać przez $\mathbb{A}$.*

Przykład 8.1. *Liczba $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 - 2 = 0$, jest więc algebraiczna całkowita. Liczba $\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $2x - 1 = 0$, więc jest algebraiczna, ale nie algebraiczna całkowita.*

Lemat 8.1. *Mamy $\mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.*

Dowód. Niech $\frac{p}{q} \in \mathbb{A}$, ułamek nieskracalny. Po wymnożeniu wielomianu, którego $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem przez q^n mamy

$$p^n = qw,$$

gdzie w jest pewną liczbą całkowitą. Ale $(p, q) = 1$, więc $q = 1$ (można o tym się przekonać rozkładając p, q na czynniki pierwsze). $\square$

Definicja 8.2. *Rozważmy zbiór macierzy o wyrazach całkowitych. Oznaczmy ten zbiór przez $\text{Hom}(\mathbb{Z})$.*

Lemat 8.2. *Liczba x należy do $\mathbb{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest wartością własną macierzy z $\text{Hom}(\mathbb{Z})$.*

Dowód. $\Rightarrow$ Skonstruujemy macierz, której x jest wartością własną. Niech $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y + a_0$ będzie wielomianem, którego x jest pierwiastkiem. Rozważmy macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \vdots & & & \\ (-1)^n a_0 & a_1(-1)^{n-1} & \dots & a_{n-1}(-1) \end{bmatrix}$$

Jest to macierz, której x wielomianem charakterystycznym jest $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y + a_0$.

$\Leftrightarrow$ Pierwiastek wielomianu charakterystycznego macierzy z $\text{Hom}(\mathbb{Z})$ jest liczbą algebraiczną. $\square$

Lemat 8.3. *Zbiór liczb algebraicznych jest podpierścieniem, tj. jeśli $a, b \in \mathbb{A}$, to $ab, a + b \in \mathbb{A}$.*

Dowód. Jeśli a jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A wymiarów $n \times n$, b pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy B wymiarów $m \times m$, to:

- $a + b$ jest wartością własną macierzy $A \otimes I_m + I_n \otimes B$ z wektorem własnym $v \otimes w$, gdzie $Av = av, Bw = bw$, ponieważ

$$(A \otimes I_m + I_n \otimes B)(v \otimes w) = (Av \otimes I_m w) + (I_n v \otimes Bw) = (a + b)(v \otimes w).$$

- ab jest wartością własną macierzy $A \otimes B$ odpowiadającą wektorowi własnemu $v \otimes w$.

□

Lemat 8.4. *Jeśli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{A}$, to istnieje m , $\phi \in \mathbb{C}^m$ oraz B_i takie, że*

$$B_i \phi = \alpha_i \phi.$$

Dowód. Niech A_i będą macierzami takimi, że $A_i v_i = \alpha_i v_i$ wymiarów $m_i \times m_i$, rozważmy macierze

$$B_i = I_{m_1} \otimes I_{m_2} \otimes \dots \otimes A_i \otimes I_{m_{i+1}} \otimes \dots \otimes I_{m_n}$$

oraz wektor

$$\phi = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n.$$

Są to szukane macierze i szukany wektor, $m = \prod_{i=1}^n m_i$. □

Lemat 8.5. *Jeśli $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, $b_{ij} \in \mathbb{A}$, to wartości własne B są liczbami algebraicznymi.*

Dowód. Z poprzedniego lematu istnieją macierze B_{ij} i wektor ϕ takie, że $B_{ij}\phi = b_{ij}\phi$. Rozważmy macierz

$$Q = \sum_{i,j} B_{ij} \otimes \delta_{ij}.$$

Macierz Q jest całkowitoliczbowa. Niech α będzie wartością własną macierzy B , czyli $B\psi = \alpha\psi$, wtedy

$$Q(\phi \otimes \psi) = \sum_{i,j} B_{ij} \phi \otimes \delta_{ij} \psi = \sum_{i,j} b_{ij} \phi \otimes \delta_{ij} \psi = \sum_{i,j} \phi \otimes b_{ij} \delta \psi = \phi \otimes B\psi = \alpha(\phi \otimes \psi).$$

Stąd α jest wartością własną macierzy całkowitoliczbowej, stąd jest liczbą algebraiczną. □

Lemat 8.6. *Niech $\pi \in \hat{G}$ będzie reprezentacją skończonej grupy. Wtedy $\chi_\pi(g)$ jest liczbą algebraiczną całkowitą dla każdego $g \in G$.*

Dowód. Niech n będzie rzędem G . Wtedy $g^n = 1$, czyli $\pi(g^n) = I$, zatem wartości własne $\pi(g)$ są pierwiastkami n -tego stopnia z 1. Zatem $\chi_\pi(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, gdzie λ_i są tymi wartościami własnymi jest liczbą algebraiczną całkowitą. □

Lemat 8.7. *Dla dowolnych charakterów χ_π, χ_σ , gdzie $\pi, \sigma \in \hat{G}$ mamy*

$$\chi_\pi \star \chi_\sigma = \delta_{\pi\sigma} \frac{|G|}{d(\pi)} \chi_\pi.$$

Dowód. Wyliczamy z definicji

$$\begin{aligned} \chi_\pi \star \chi_\sigma(x) &= \sum_y \chi_\pi(xy^{-1}) \chi_\sigma(y) = \sum_{y,k,l} D_{kk}^\pi(xy^{-1}) D_{ll}^\sigma(y) = \sum_{y,k,l,j} D_{kj}^\pi(x) D_{jk}^\pi(y^{-1}) D_{ll}^\sigma(y) = \\ &= \sum_{y,k,l,j} D_{kj}^\pi(x) \overline{D_{kj}^\pi(y)} D_{ll}^\sigma(y) = \sum_{y,k,l,j} D_{kj}^\pi(x) \frac{|G|}{d(\pi)} \delta_{\pi\sigma} \delta_{kl} \delta_{jl} = \frac{|G|}{d(\pi)} \delta_{\pi\sigma} \chi_\pi(x). \end{aligned}$$

□

Przechodzimy do dowodu głównego twierdzenia rozdziału.

Twierdzenie 8.1. *Zachodzi podzielność $d(\pi) \mid |G|$, gdzie $\pi \in \hat{G}$.*

Dowód. Utwórzmy wektor złożony z wartości charakteru χ_π po wszystkich elementach grupy G . Lemat 8.7 daje nam, że wektor ten jest wektorem własnym macierzy

$$(\chi_\pi(xy^{-1}))_{x,y}$$

z wartością własną $\frac{|G|}{d(\pi)}$. Macierz ta na podstawie lematu 8.6 jest złożona z wyrazów z $\mathbb{A}$, więc $\frac{|G|}{d(\pi)} \in \mathbb{A}$. Na mocy lematu 8.1 jest to liczba całkowita. $\square$

9. Funkcje dodatnio określone a teoria reprezentacji

9.1. Funkcje dodatnio określone

Podamy definicję funkcji dodatnio określonej, następnie udowodnimy kilka twierdzeń związanych z teorią reprezentacji.

Definicja 9.1. *Funkcję $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **dodatnio określoną** jeśli dla dowolnego N , dowolnych zespolonych α_i i dowolnych elementów grupy x_i mamy*

$$\sum_{i,j=1}^N f(xy^{-2})\alpha_i\overline{\alpha_j} \geq 0.$$

Definicja 9.2. *Ciąg a_n nazywamy dodatnio określonym, gdy dla dowolnego N i dowolnych zespolonych α_i mamy*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i-j}\alpha_i\overline{\alpha_j} \geq 0.$$

Uwaga 9.1. Definicja jest równoważna z tym, że dla każdego N macierz

$$(f(x_i x_j^{-1}))_{i,j=1}^N$$

jest dodatnio określona.

Uwaga 9.2. Jeśli $G = (\mathbb{Z}, +)$ to z dodatniej określoności funkcji (ciągu) wynika, że

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} f(k)e^{ik\phi}$$

dla dowolnego $\phi \in [0, 2\pi)$.

Jasnym jest, że suma funkcji dodatnio określonych jest dodatnio określona. Okazuje się, że analogiczna własność zachodzi również dla iloczynu. W celu udowodnienia tego wprowadzamy tzw. iloczyn Hadamarda.

Definicja 9.3. *Iloczynem Hadamarda macierzy $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ wymiarów $n \times n$ nazywamy macierz*

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij}).$$

Twierdzenie 9.1. *Iloczyn Hadamarda macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określony.*

Dowód. Udowodnimy najpierw tożsamość

$$\langle A \circ Bx, y \rangle = \text{Tr}(A \text{diag}(x)B \text{diag}(\bar{y})),$$

gdzie

$$\text{diag}(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

oraz A, B są macierzami hermitowskimi. Ze względu na liniowość całego wyrażenia wystarczy, że sprawdzimy na bazie. Mając ten wzór wystarczy pokazać, że

$$\text{Tr}(A \text{diag}(x)B^* \text{diag}(\bar{x})) \geq 0.$$

Jednakże, A, B są dodatnio określone, czyli istnieje pierwiastek z nich, to daje

$$\text{Tr}(A \text{diag}(x)B^* \text{diag}(\bar{x})) = \text{Tr}(A^{1/2}A^{1/2} \text{diag}(x)B^{1/2}B^{1/2} \text{diag}(\bar{x})).$$

Następnie z własności śladu zapisujemy

$$\text{Tr}(A^{1/2}A^{1/2} \text{diag}(x)B^{1/2}B^{1/2} \text{diag}(\bar{x})) = \text{Tr}((A^{1/2} \text{diag}(x)B^{1/2})(B^{1/2} \text{diag}(\bar{x})A^{1/2})) = \text{Tr}(CC^*),$$

gdzie $C = A^{1/2} \text{diag}(x)B^{1/2}$. Wyrażenie $\text{Tr}(CC^*)$ jest dodatnie, ponieważ jest równe normie Hilberta-Schmidta macierzy C . $\square$

9.2. Twierdzenie Herglotza

Przypomnijmy kilka podstawowych pojęć związanych z teorią szeregów Fouriera.

Definicja 9.4. *Jądrem Dirichleta nazywamy*

$$D_n(z) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

dla n naturalnego.

Definicja 9.5. *Jądrem Fejera nazywamy średnią arytmetyczną jąder Dirichleta, tj.*

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(x).$$

Fakt 9.1. Jądro Fejera ma następujące własności:

- $F_N(x) \geq 0$,
- ciąg $a_N(k) = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)_+$ jest dodatnio określony, ponieważ

$$a_N(k) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} F_N(x) dx.$$

Sformułujemy i udowodnimy główne twierdzenie tego rozdziału wykorzystując aproksymację jądrem Fejera.

Twierdzenie 9.2. (Herglotz) *Każda funkcja ϕ dodatnio określona na grupie zwartej (dyskretnej) jest postaci*

$$\phi(g) = \int_G \gamma(g) d\mu(g),$$

gdzie μ jest pewną miarą probabilistyczną. W szczególności jest tak dla $G = (\mathbb{Z}, +)$.

Dowód. Rozważmy ciąg $a_N(k) = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)_+$. Jest on dodatnio określony. Z twierdzenia 9.1 ciąg $a_N(k)\phi(k)$ też jest dodatnio określony. Stąd mamy

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{-ikx} \phi(k) \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \geq 0,$$

co w połączeniu z tym, że $\phi(0) = 1$ daje całkowalność do 1 po odcinku $[0, 2\pi)$. Zatem $T_n(x)$ zadaje dystrybuantę pewnej miary. Z twierdzenia Helly'ego (bądź *-słabej zbieżności na przestrzeni dualnej do $C[0, 2\pi)$) mamy, że istnieje podciąg zbieżny miar zadanych przez T_n do pewnej miary probabilistycznej μ . Liczymy

$$\int_G e^{ikx} d\mu(x) = \lim_{n_j \rightarrow \infty} \int_G e^{ikx} \sum_{k=-n_j}^{n_j} e^{-ikx} \phi(k) \left(1 - \frac{|k|}{n_j}\right) d\mu(x) = \lim_{n_j \rightarrow \infty} \phi(k) \left(1 - \frac{|k|}{n_j}\right) = \phi(k).$$

□

9.3. Twierdzenie Gelfanda-Naimarka-Segala

Okazuje się, że można podać ogólne twierdzenie charakteryzacyjne dla funkcji dodatnio określonych na grupie (dyskretnej).

Twierdzenie 9.3. *Niech ξ będzie ustalony, π będzie dowolną reprezentacją grupy G . Wtedy $\phi(g) = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$ jest funkcją dodatnio określoną na grupie G .*

Dowód. Sprawdzamy biorąc dowolne N i liczby zespolone z_i

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \langle \pi(g_i^{-1}g_j)\xi, \xi \rangle z_j \overline{z_i} &= \sum_{i,j=1}^N \langle \pi(g_j)\xi, \pi(g_i)\xi \rangle z_j \overline{z_i} = \sum_{i,j=1}^N \langle \pi(g_j)z_j\xi, \pi(g_i)z_j\xi \rangle = \\ &= \left\| \sum_i^N z_i \pi(g_i)\xi \right\|^2. \end{aligned}$$

□

Przykład 9.1. Mając taką charakteryzację możemy (z podobnym dowodem) podać przykłady funkcji dodatnio określonych np. na $\mathbb{R}$:

1. funkcja e^{x^2} , jest transformatą Fouriera funkcji postaci $e^{(x-a)^2/b^2}$,
2. funkcja $r^{|x|}$ dla $r \in [0, 1]$ jest transformatą Fouriera funkcji postaci $1/(x^2 + 1)$,
3. funkcja $1/\cosh(x)$, jest transformatą Fouriera funkcji $1/\cosh(ax)$ dla pewnego a .

Okazuje się, że funkcje postaci $\phi(g) = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$ to jedyne funkcje dodatnio określone na grupie (dyskretnej), zapewnia to twierdzenie Gelfanda-Naimarka-Segal'a.

Twierdzenie 9.4. Dla każdej funkcji ϕ dodatnio określonej na grupie dyskretnej istnieje przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$, wektor cykliczny ξ , reprezentacja $(\pi, \mathcal{H})$ i iloczyn skalarny takie, że

$$\phi(g) = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle.$$

Dowód. Rozważmy formę dwuliniową p na $\mathbb{C}[G]$ zadaną następująco

$$p(f_1, f_2) = \sum_{x, y \in G} \phi(y^{-1}x) f_1(y) f_2(x).$$

Z dodatniej określoności ϕ spełnia wszystkie aksjomaty iloczynu skalarnego oprócz niezdegenerowania. W szczególności spełnia też nierówność Cauchy'ego-Schwarza (jej dowód nie używa niezdegenerowania). Rozważmy podprzestrzeń

$$H = \{f : p(f, f) = 0\}.$$

Jest to podprzestrzeń liniowa (w dowodzie korzystamy z nierówności Cauchy'ego-Schwarza)

$$p(f_1 + f_2, f_1 + f_2) = p(f_1, f_1) + p(f_2, f_2) + 2p(f_1, f_2) = 0 + 0 + 2p(f_1, f_2) \leq \sqrt{p(f_1, f_1)} \sqrt{p(f_2, f_2)} = 0.$$

Z tego, że grupa jest dyskretna, jest to także podprzestrzeń domknięta, zatem wydzielimy $\mathbb{C}[G]/H$. Na tej podprzestrzeni zadajemy nową formę dwuliniową q

$$q([f_1], [f_2]) = p(f_1, f_2).$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza nie zależy ona od wyboru reprezentantów klas równoważności. $\mathbb{C}[G]/H$ niekoniecznie musi być przestrzenią Hilberta, uzupełniamy ją do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Definiujemy reprezentację unitarną na $\mathbb{C}[G]/H$

$$\pi(\hat{g}) = [f] = [\pi(g)f].$$

Definiujemy też reprezentację na uzupełnieniu $\mathcal{H}$

$$\pi(g)[[f]] = [\pi(g)x]$$

gdzie x jest granicą ciągu Cauchy'ego f . Jest to reprezentacja. Teraz wystarczy wziąć

$$\xi = [[\delta_e]].$$

Mamy wtedy

$$\pi(g)\xi = [[\delta_g]].$$

Sprawdzamy na iloczynie skalarnym $\mathcal{H}$

$$\langle \pi(g)[[\delta_e]], [[\delta_e]] \rangle = p(\delta_g, \delta_e) = \phi(g).$$

□