

Wstęp do teorii reprezentacji grup. Lista 1

- 1.a) Niech $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wówczas a i b są wolnymi generatorami grupy wolnej $\mathbf{F}_2$.
- b) Jeśli $x_k = a^k b^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, to zbiór $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jest zbiorem wolnych generatorów grupy F_n .
- 2.a) Pokazać, że grupa G rzędu p (p – liczba pierwsza) jest cykliczna.
- b) Jeśli rząd grupy G jest równy p^2 (p – liczba pierwsza), to też G jest abelowa.
- c*) Jeśli rząd grupy $|G| = p^k$, to grupa ma nie-trywialne centrum $|Z(G)| \geq p$, gdzie $Z(G) = \{x \in G : xg = gx \text{ dla dowolnego } g \in G\}$.
3. Niech dla macierzy $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$, ślad $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, wówczas $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ dla dowolnych $A, B \in M_n(\mathbf{C})$.
- 4.* Opisz funkcje liniowe $\varphi: M_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C} : \varphi(AB) = \varphi(BA)$ dla dowolnych $A, B \in M_n(\mathbf{C})$.
-

5. Niech $G = U(n)$ – grupa macierzy unitarnych działających na $M_n(\mathbf{C})$, $\Phi_A(X) = AXA^{-1}$. Wówczas

$$M_n(\mathbf{C}) = \mathbf{C}I \oplus M_n^+(\mathbf{C}) \oplus M_n^-(\mathbf{C}),$$

gdzie $M_n^+(\mathbf{C}) = \{X : \text{macierz hermitowska } a_{ij} = \overline{a_{ji}}, \text{tr}(X) = 0\}$,

$M_n^-(\mathbf{C}) = \{X : \text{macierz antyhermitowska } : \text{tr}(X) = 0\}$. Obliczyć $\dim M_n^+$, $\dim M_n^-$.

6. Niech $S(n)$ działa na $\mathbf{C}^n$ jako macierze permutacji $\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$, $j = 1, \dots, n$, $\{e_j\}$ baza. Wówczas

$$V_0 = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j : \sum \lambda_j = 0 \right\}$$

jest podprzestrzenią niezmienniczą i daje reprezentację nieprzywiedlną grupy $S(n)$.

7. Niech $\mathbf{Z}_n$ będzie grupa cykliczną rzędu n . Opisać nieprzywiedlne reprezentacje $\mathbf{Z}_n$ nad $\mathbf{C}$.
8. Pokaż, że każda ciągła 1-wymiarowa reprezentacja grupy $(\mathbf{R}, +)$, $\pi \approx \gamma_t$, $\gamma_t(x) = e^{itx}$, dla pewnego $t \in \mathbf{R}$.
9. Podaj przykłady nie-ciągłych reprezentacji $(\mathbf{R}, +)$.
Wsk. Konstruuj funkcję nie-ciągłą Hamela

$$H(x+y) = H(x) + H(y), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

używając bazy $\mathbf{R}$ nad $\mathbf{Q}$.