

Wstęp do teorii reprezentacji grup. Lista 10

1. Niech $P = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ będzie (zespoloną) macierzą dodatnio (nieujemnie) określoną (dla dowolnych zespolonych α_i zachodzi $\sum_{i,j} a_{ij} \alpha_i \bar{\alpha}_j \geq 0$). Udowodnij, że wtedy istnieją wektory $\xi_i \in \mathbf{C}^n$, takie że $a_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$. Czy to zachodzi również dla $n = \infty$?
2. Niech $P_1 = (a_{ij}), P_2 = (b_{ij})$ będą macierzami dodatnio określonymi. Wówczas iloczyn Hadamarda $P_1 \circ P_2 := (a_{ij} b_{ij})$ też jest dodatnio określony.
3. Niech $\varphi: G \rightarrow \mathbf{C}$ będzie dodatnio określona na grupie G . Wówczas $|\varphi(x)| \leq \varphi(e)$ dla każdego $x \in G$.
4. Niech $\varphi: G \rightarrow \mathbf{C}$ będzie dodatnio określona na grupie G . Wówczas, dla dowolnych $x, y \in G$ (wsk. GNS):

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \leq 2\varphi(e)[\varphi(e) - \operatorname{Re} \varphi(x^{-1}y)].$$

5. Pokaż, że następujące funkcje są dodatnio określone na $(\mathbf{R}, +)$:

$$e^{-x^2}, \quad \frac{1}{\cosh(x)}, \quad e^{-|x|^p} \quad (0 < p \leq 2), \quad r^{|x|} \quad (-1 \leq r \leq 1).$$

6. Pokaż, że następujące funkcje są dodatnio określone na grupie $(\mathbf{Z}, +)$:

(a) $\varphi_r(n) = r^{|n|}, -1 \leq r \leq 1;$

(b) $\psi_\lambda(n) = e^{-\lambda n^2}, \lambda \geq 0$ (wsk. rozważ $e^{-\lambda x^2}$ na \mathbf{R});

(c) ciąg Fejéra $F_N(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{N} & \text{dla } |k| \leq N \\ 0 & \text{dla } |k| > N \end{cases}$

7. Funkcję z poprzedniego zadania $\varphi_r(n) = r^{|n|} (-1 \leq r \leq 1)$ zrealizuj jako współczynnik macierzowy unitarnej reprezentacji grupy $(\mathbf{Z}, +)$ (możliwie jawnie).
8. Pokaż, że funkcja na grupie permutacji przypisująca permutacji $\sigma \in S_n$ liczbę jej punktów stałych $|\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \sigma(k) = k\}|$ jest dodatnio określona.
9. Pokaż, że funkcja $\varphi_r(x) = r^{|x|} (-1 \leq r \leq 1)$ określona na wolnej grupie abelowej o dwóch generatorach (gdzie $|x|$ oznacza długość nieredukowalnego słowa reprezentującego x) jest dodatnio określona.