

Wstęp do teorii reprezentacji grup. Lista 2

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbf{C} \right\}$$

1. Sprawdź, że $\mathbf{H}$ z działaniami dodawania i mnożenia macierzy tworzy ciało nieprzemienne. Znajdź centrum tego ciała.
2. Dla $q \in \mathbf{H}$ określamy normę wzorem $|q| = \sqrt{\det q}$. Niech $\mathrm{Sp}(1) = \{q \in \mathbf{H} \mid |q| = 1\}$. Sprawdź, że $\mathrm{Sp}(1)$ z operacją mnożenia jest grupą. Uzasadnij, że grupa ta składa się ze wszystkich unitarnych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1; z tego też powodu jest ona oznaczana $\mathrm{SU}(2)$.

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Sprawdź, że zbiór $Q = \{\pm \mathbf{1}, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$ tworzy grupę mnożeń. Jeśli jej nie znasz, zapoznaj się z nią: napisz tabelkę działania, opisz centrum, komutant, klasy sprzężoności, podgrupy normalne i ilorazy. Czy znasz inną nieprzemienne grupę ośmioelementową?

4.* $\mathrm{SU}(2)/\{\pm \mathbf{1}\} \simeq \mathrm{SO}(3)$

W poniższych dwóch zadaniach pracujemy nad ciałem liczb 5-adycznych $\mathbf{Q}_5$. W szczególności $|x|$ oznacza 5-adyczny moduł (wartość bezwzględna) liczby $x \in \mathbf{Q}_5$. Na przykład: $|1/5| = 5$, $|1| = |-17| = 1$, $|10| = 1/5$, $|0| = 0$.

- 5.a) Sprawdź, że w $\mathbf{Q}_5$ istnieje i – pierwiastek z -1 . Wylicz kilka ostatnich cyfr rozwinięcia liczby i w układzie piątkowym.

b) Niech

$$M = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Znajdź wartości własne i wektory własne tej macierzy (nad $\mathbf{Q}_5$). W szczególności sprawdź, że jej wartości własne $\lambda, \bar{\lambda}$ spełniają $|\bar{\lambda}| < 1 < |\lambda|$.

- c) Uzasadnij, że jeśli $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, to każdy wyraz macierzy M^n ma moduł $5^{|n|}$.

6. Niech

$$a = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Udowodnij, że te dwie macierze generują grupę wolną. Użyj lematu ping-pongowego ze zbiorami ($b[A] \subseteq B$ itp.)

$$A = \{(x, y, z)^\top \in \mathbf{Q}_5^3 \mid |x| = |y| > |z|\}, \quad B = \{(x, y, z)^\top \in \mathbf{Q}_5^3 \mid |x| < |y| = |z|\}.$$