

Wstęp do teorii reprezentacji grup. Lista 3

Je n'ai pas le temps

Niech (tu i dalej na tej liście) $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej na skończenie wymiarowej zespolonej przestrzeni liniowej V . *Charakterem* reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho: G \rightarrow \mathbf{C}$ daną wzorem $\chi_\rho(g) = \text{Tr } \rho(g)$. Powiemy, że funkcja $f: G \rightarrow \mathbf{C}$ jest charakterem, jeśli jest postaci χ_ρ dla pewnej ρ .

1. (Przypomnienie) Jak wygląda postać Jordana $\rho(g)$?
2. (Elementarz) Sprawdź, że

$$(a) \quad \chi_\rho(1) = \dim V, \quad (b) \quad \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}, \quad (c) \quad \chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h).$$

3. (Cukierki) Sprawdź, że:
 - a) jeśli $\chi_\rho(1) = 1$, to $\chi_\rho(gh) = \chi_\rho(g) \cdot \chi_\rho(h)$;
 - b) jeśli dla każdego $g \in G$ zachodzi $|\chi_\rho(g)| = |\chi_\rho(1)|$, to ρ jest sumą prostą reprezentacji jednowymiarowych, parami izomorficznych.
4. (O konstrukcjach tensorowych) Załóżmy, że $f, g: G \rightarrow \mathbf{C}$ są charakterami. Uzasadnij, że charakterem jest też wówczas funkcja: $f + g, fg, \bar{f}, g \mapsto \frac{1}{2}(f(g)^2 \pm f(g^2)), \dots$
5. (Do rzeczy, czyli przykłady)
 - a) Wylicz charaktery znanych Ci nieprzywiedlnych reprezentacji grup $S(3), S(4)$ (powinieneś ich znać po trzy).
 - b) Weź swój ulubiony wielościan foremny. Przesuń go tak, by jego środek znalazł się w zerze; niech G będzie jego grupą symetrii. Działanie elementu $g \in G$ na wielościanie rozszerza się do liniowej izometrii $\mathbf{R}^3$; tak zadaliśmy reprezentację G na $\mathbf{R}^3$. Wylicz jej charakter.
 - c) Na przestrzeni $\mathbf{C}(G) = \{f: G \rightarrow \mathbf{C}\}$ definiujemy lewą reprezentację regularną G wzorem $(\lambda_G(g)f)(h) = f(g^{-1}h)$, zaś prawą regularną wzorem $(\rho_G(g)f)(h) = f(hg)$. Oblicz charaktery tych reprezentacji. Wyjdą takie same, bo przecież to izomorficzne reprezentacje – prawda?
6. (Uśrednianie)
 - a) Czy jest $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$?
 - b) Niech (ρ, V) i (π, W) będą reprezentacjami G , zaś $L: V \rightarrow W$ przekształceniem liniowym. Udowodnij, że odwzorowanie $A_G(L): V \rightarrow W$ dane wzorem

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g)^{-1} L \rho(g)$$

określa morfizm reprezentacji (odwzorowanie ekwiwariantne, przeplatacz) – spełnia ono warunek $\pi(g)A_G(L) = A_G(L)\rho(g)$.

- c) Niech $\langle, \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na V . Udowodnij, że wzór

$$\langle v, w \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle$$

określa na V iloczyn skalarny zachowywany przez każde przekształcenie $\rho(g)$ (tzw. ρ -niezmienniczy).

7. (Unitaryzacja, czyli to samo w przebraniu) Niech $\rho: G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbf{C})$ będzie homomorfizmem (G jak zwykle skończona). Udowodnij, że istnieje macierz $P \in \text{GL}(n, \mathbf{C})$, taka że dla każdego $g \in G$ macierz $P\rho(g)P^{-1}$ jest unitarna.
8. (Rozkład) Udowodnij, że V jest rozkładalna, tj. izomorficzna z sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
9. (Schur)
 - a) Między nieizomorficznymi nieprzywiedlnymi reprezentacjami (skończonej) grupy G nie ma niezerowych przeplataczy.
 - b) Przestrzeń własna endomorfizmu reprezentacji jest podreprezentacją (podprzestrzenią niezmienniczą).
 - c) Endomorfizmy nieprzywiedlnej reprezentacji (skończonej) grupy G są wszystkie skalarnymi krotnościami identyczności.
10. (Unitaryzacja – zawsze ta sama) Udowodnij, że na nieprzywiedlnej reprezentacji V niezmienniczy iloczyn skalarny jest, z dokładnością do skalowania, jedyny.
11. (Współczynniki macierzowe) Ustalmy na V niezmienniczy iloczyn skalarny oraz ortonormalną bazę (e_i) . Funkcje na G postaci $\rho_{ij}(g) = \langle \rho(g)e_i, e_j \rangle$ nazywamy współczynnikami macierzowymi reprezentacji ρ . Uzasadnij, że choć same współczynniki zależą od wyboru bazy, to rozpinana przez nie podprzestrzeń $\mathbf{C}(G)$ już od tego wyboru nie zależy.
12. (Ortogonalność współczynników macierzowych) Na przestrzeni $\mathbf{C}(G)$ wprowadźmy iloczyn skalarny:

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F(g) \overline{G(g)}.$$

Niech V i W będą nieizomorficznymi nieprzywiedlnymi reprezentacjami G , z ortonormalnymi bazami $(e_i), (f_i)$. Uśrednij odwzorowanie $f_j \otimes e_i^*: V \rightarrow W$ i zastosuj lemat Schura. Wyniknie stąd, że współczynniki macierzowe V są ortogonalne do współczynników macierzowych W (w przestrzeni $\mathbf{C}(G)$). W szczególności $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = 0$.

13. (Charaktery to układ ortonormalny) Niech V będzie nieprzywiedlną reprezentacją G . Zastosuj argument z poprzedniego zadania (ze stosownymi modyfikacjami) do przypadku $W = V$; uzasadnij, że charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych tworzą w $\mathbf{C}(G)$ układ ortonormalny.

Rozkładalność reprezentacji w połączeniu z ortonormalnością układu charakterów ma dramatyczne konsekwencje / jest źródłem przedniej zabawy. Na przykład:

14. Niech $V = \mathbf{C}^3$ będzie reprezentacją $S(3)$ permutującą wektory standardowej bazy (tą z pierwszej listy). Jakie nieprzywiedlne składniki, i z jakimi krotnościami, pojawiają się w rozkładzie reprezentacji $\text{Hom}(V^{\otimes 3}, \Lambda^2 V)$?
15. Napisz tabelkę charakterów ośmioelementowej grupy kwaternionowej Q .