

Wstęp do teorii reprezentacji grup. Lista 4

1. Weź grupę zwartą. Znajdź miarę Haara. Powtarzaj - ad nauseam.
2. Grupę $\text{Sp}(1)$ jednostkowych kwaternionów utożsamiamy ze sferą $S^3 \subseteq \mathbf{C}^2 \simeq \mathbf{R}^4$ przez $\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$. Uzasadnij, że przy tym utożsamieniu mierze Haara odpowiada miara powierzchniowa na sferze.
3. (Jednoznaczność miary Haara) Niech μ, ν będą lewo-niezmienniczymi miarami Haara na (lokalnie) zwartej grupie G . Dla każdego zwartego, symetrycznego otoczenia jedynki α wybierzmy nieujemną ciągłą funkcję ψ_α o nośniku w α , która jest symetryczna ($\psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x^{-1})$) oraz spełnia $\int \psi_\alpha(x) d\mu(x) = 1$.
 - a) Uzasadnij, że da się takie funkcje ψ_α dobrać.
 - b) Uzasadnij, że kolekcja $(\psi_\alpha)_\alpha$ jest jednością aproksymatywną: dla każdej $f \in C_c(G)$ ciąg uogólniony $\int f(x)\psi_\alpha(x^{-1}y) d\mu(x)$ zbiega (jednostajnie) do $f(y)$.
 - c) Uzasadnij poprawność rachunku:

$$\begin{aligned} \int f(y) d\nu(y) &= \lim_\alpha \int \int f(x)\psi_\alpha(x^{-1}y) d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \int f(x) \lim_\alpha \int \psi_\alpha(x^{-1}y) d\nu(y) d\mu(x) = c \cdot \int f(y) d\mu(y) \end{aligned}$$

- d) Konkluzja: $\nu = c \cdot \mu$ dla pewnej stałej $c > 0$.
4. Niech μ będzie lewo-niezmienniczą miarą Haara na (lokalnie) zwartej grupie G . Niech R_g (gdzie $g \in G$) oznacza prawe przesunięcie: $R_g: G \ni h \mapsto hg \in G$.
 - a) Uzasadnij, że $(R_g)_*\mu$ jest lewo-niezmienniczą miarą Haara na G . Wywnioskuj stąd, że jest ona postaci $\Delta(g) \cdot \mu$ dla pewnej liczby $\Delta(g) > 0$.
 - b) Uzasadnij, że odwzorowanie $\Delta: G \ni g \mapsto \Delta(g) \in \mathbf{R}_+^\times$ jest ciągłym homomorfizmem G w grupę mnożliwą dodatnich liczb rzeczywistych. (Nazywa się je *funkcją modularną* grupy G i oznacza Δ_G .)
 - c) Sprawdź, że grupa G ma obustronnie niezmienniczą miarę Haara wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta_G \equiv 1$. Takie grupy nazywamy *unimodularnymi*.
 - d) Uzasadnij, że każda grupa zwarta jest unimodularna. Czy znasz jakieś niezwarłe grupy unimodularne?
 5. Znajdź lewo- i prawo-niezmiennicze miary Haara oraz funkcję modularną na grupie "ax+b", tzn. grupie macierzy postaci $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 6. Miara Haara μ na grupie $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a ℓ na przestrzeni $M_{n \times n}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{n^2}$ (której grupa $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ jest podzbiorem otwartym). Znajdź funkcję $f: \text{GL}(n, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$, taką że $d\mu = f \cdot d\ell$.
 7. Uzasadnij zwartość, zbadaj spójność i wyznacz wymiar grup: $\text{U}(n)$, $\text{SU}(n)$, $\text{O}(n)$, $\text{SO}(n)$.
 8. Niech G – grupa zwarta, wówczas funkcje ciągłe $C(G)$ z operacją splotu ($f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(xy^{-1})f_2(y) dy$) stanowią algebrę Banacha: $\|f_1 * f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty$. Jeśli G jest nieskończona, to ta algebra nie posiada jedynki.

*Oj, próżno się człek prosty dorozumieć stara,
Oj, co to jest za miara zwana miarą Haara;*