Wstęp do teorii reprezentacji grup. Lista 5

Na tej liście G oznacza grupę skończoną, $\mathbf{C}G$ jej algebrę grupową, czyli algebrę splotową funkcji $f\colon G \to \mathbf{C}$, często zapisywanych w postaci $\sum_{g\in G} f(g)\cdot g$. Przez $\mathbf{C}_{\mathrm{class}}G$ oznaczamy podalgebrę $\mathbf{C}G$ złożoną z funkcji, które są stałe na każdej klasie sprzężoności. Rozważamy reprezentacje G na skończenie wymiarowych zespolonych przestrzeniach liniowych.

1. Sprawdź, że $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$. (Splot funkcji odpowiada więc, w drugiej notacji, "zwykłemu" mnożeniu $g \cdot h = gh$.)
2. Uzasadnij, że $\mathbf{C}_{\mathrm{class}}G$ jest podalgebrą $\mathbf{C}G$.
3. Dla reprezentacji (ρ, V) grupy G rozważmy odwzorowanie $\mathbf{C}G \to \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$:
$$f \mapsto \rho(f) := \sum_{g\in G} f(g)\rho(g).$$
Uzasadnij, że jest ono homomorfizmem algebr; a jeśli $f \in \mathbf{C}_{\mathrm{class}}G$, to $\rho(f) \in \mathrm{End}_G(V)$.
4. Sprawdź, że jeśli $a, b \in \mathbf{C}G$, to $\lambda_G(a)b = a * b = \rho_G(b^\vee)a$ (gdzie λ_G oznacza lewą, a ρ_G prawą reprezentację regularną G; zaś $b^\vee(g) := b(g^{-1})$).
5. Z nieprzywiedlną reprezentacją W grupy G związany jest element algebry $\mathbf{C}G$:
$$p_W := \frac{\dim W}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi_W(g)} \cdot g.$$
   a) Uzasadnij, że jeśli (ρ, V) jest reprezentacją G, to $\rho(p_W)$ jest rzutem na sumę składników izomorficznych z W w rozkładzie V na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
   b) Uzasadnij, że p_W jest idempotentem algebry $\mathbf{C}G$.
   c) Uzasadnij, że jeśli W i U są nierównoważnymi nieprzywiedlnymi reprezentacjami G, to $p_W \cdot p_U = 0$.

   (Wsk. dowodząc b) i c) możesz użyć a) dla reprezentacji regularnej.)
6. Załóżmy, że $f \in \mathbf{C}_{\mathrm{class}}G$ jest ortogonalna do charakterów wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji G. Uzasadnij, że wtedy $\lambda_G(f) = 0$. Wywnioskuj $f = 0$. Udowodnij, że charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych tworzą bazę ortonormalną $\mathbf{C}_{\mathrm{class}}G$.
7. Uzasadnij, że jeśli elementy g, h grupy G nie są sprzężone, to $\sum_\chi \chi(g)\overline{\chi(h)} = 0$ (suma po wszystkich nieprzywiedlnych charakterach χ grupy G). Ile wynosi ta suma, gdy g i h są sprzężone?
8. Niech V będzie reprezentacją G. Uzasadnij, że jeśli $\langle \chi_V, \chi_V\rangle = 1$, to V jest nieprzywiedlna; a jeśli $\langle \chi_V, \chi_V\rangle = 2$, to V jest sumą prostą dwóch nierównoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych. A co jeśli zamiast 2 napiszemy 3? 4? 5?
9. Niech V będzie reprezentacją S_d (grupy permutacji) na $\mathbf{C}^d$ permutującą osie, i niech $W = \{(x_i) \in \mathbf{C}^d \mid \sum x_i = 0\}$ będzie nieprzywiedlną podreprezentacją V. Wykaż, że $\Lambda^k W$ jest nieprzywiedlna dla $k = 0, 1, \ldots, d-1$. (Wsk. $\langle \chi_{\Lambda^k V}, \chi_{\Lambda^k V}\rangle = 2$.)

10. Niech $\{(\rho_i, W_i)\}$ będzie zbiorem nieprzywiedlnych reprezentacji G (po jednej z każdej klasy izomorfizmu). Udowodnij, że wtedy odwzorowanie

$$\mathbf{C}G \ni f \mapsto \oplus_i \, \rho_i(f) \in \bigoplus_i \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(W_i)$$

jest izomorfizmem algebry $\mathbf{C}G$ z sumą prostą algebr macierzowych.