

Wstęp do teorii reprezentacji grup. Lista 6

Celem tej listy jest opis nieprzywiedlnych reprezentacji grupy permutacji S_d , z dowodem jak w książce Fultona i Harrisa. *Partycja* λ liczby d to jej przedstawienie w postaci sumy dodatnich liczb całkowitych; kolejność ignorujemy – zwykle porządkując składniki nierosnąco: $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$, $\sum \lambda_i = d$. Piszemy: $\lambda \vdash d$. Z partycją λ wiążemy *diagram Younga*: ustawiamy w pierwszym wierszu λ_1 krater, w drugim λ_2 krater itd. Często diagram Younga oznaczamy przez λ , tak samo jak partycję z której powstał. Jeśli wpisać w kratki diagramu Younga wszystkie liczby od 1 do d w dowolnej kolejności, otrzyma się tzw. *tableau Younga*. Permutacja $g \in S_d$ działa na zbiorze tableau: gT to tableau, które ma liczbę $g(i)$ w tej kratce, w której T miało liczbę i . Z każdym tableau wiążemy dwie grupy: P – permutacji które zachowują wiersze; Q – permutacji które zachowują kolumny. Dalej, definiujemy elementy algebry grupowej \mathbf{CS}_d : $a = \sum_{p \in P} p$, $b = \sum_{q \in Q} (\text{sgn } q) \cdot q$, $c = ab$. Element c nazywa się *symetryzatorem Younga*.

Dla partycji / diagramu Younga λ utwórzmy *standardowe tableau Younga*, wpisując w diagram λ liczby po kolei, od 1 do d , najpierw w pierwszym wierszu do lewej do prawej, potem w drugim wierszu także samo itd. Z tym tableau wiążemy symetryzator c_λ , i podreprezentację $V_\lambda = \mathbf{CS}_d c_\lambda$ lewej reprezentacji regularnej.

Tw. Reprezentacje V_λ są nieprzywiedlne. Każda nieprzywiedlna reprezentacja S_d jest izomorficzna z dokładnie jedną z nich.

1. Uzasadnij, że diagramów Younga jest tyle samo, ile jest klas sprzężoności w S_d .
2. Uzasadnij, że:
 - a) W każdym z elementów a , b , c współczynniki to 0 lub ± 1 . W szczególności $c = \sum_{g \in PQ} \pm g$.
 - b) dla $p \in P$ zachodzi $pa = ap = a$;
 - c) dla $q \in Q$ zachodzi $(\text{sgn } q)qb = b(\text{sgn } q)q = b$;
 - d) dla $p \in P$, $q \in Q$ zachodzi $pc(\text{sgn } q)q = c$.
3. Załóżmy, że $c' \in \mathbf{CS}_d$ spełnia warunek: dla $p \in P$, $q \in Q$ zachodzi $pc'(\text{sgn } q)q = c'$. Udowodnij, że wtedy c' jest skalarną krotnością c – według poniższego planu lub inaczej. Niech $c' = \sum_{g \in S_d} n_g \cdot g$; załóżmy też, bez utraty ogólności, że $n_1 = 1$.
 - a) Uzasadnij, że $n_{pgq} = (\text{sgn } q)n_g$.
 - b) Uzasadnij, że $\sum_{g \in PQ} n_g \cdot g = c$.
 - c) Pozostaje pokazać, że $n_g = 0$ dla $g \notin PQ$.
 - d) Niech T oznacza tableau, do którego dobieraliśmy grupy P i Q . Niech $g \notin PQ$. Uzasadnij, że istnieją dwie różne liczby, które pojawiają się w jednym wierszu T , i też pojawiają się w jednej kolumnie gT . Oznaczmy przez t transpozycję tych liczb. Używając elementów $p = t$ i $q = g^{-1}tg$ uzasadnij, że $n_g = -n_g$.
4. Uzasadnij, że dla dowolnego $x \in \mathbf{CS}_d$ element cxc jest skalarną krotnością c ; w szczególności $c \cdot c$ jest skalarną krotnością c .
5. Załóżmy, że dwie partycje λ , μ liczby d spełniają $\lambda > \mu$ (leksykograficznie), zaś T_λ i T_μ to jakieś tableaux o kształtach zadanych przez te partycje. Udowodnij, że istnieją dwie różne liczby, które pojawiają się w jednym wierszu T_λ , i też pojawiają się w jednej

kolumnie T_μ . Wywnioskuj stąd, że $a_\lambda \cdot b_\mu = 0$. Następnie wykaż, że dla dowolnego $x \in \mathbf{C}S_d$ zachodzi $a_\lambda \cdot x \cdot b_\mu = 0$.

6. Załóżmy, że $W \subseteq \mathbf{C}G$ jest podreprezentacją lewej reprezentacji regularnej. Niech $\pi: \mathbf{C}G \rightarrow W$ będzie rzutem (lewych) reprezentacji. Uzasadnij, że istnieje $w \in W$, takie że $\pi(x) = xw$ dla wszystkich $x \in \mathbf{C}G$. Wywnioskuj stąd, że jeśli $W \neq 0$, to $W \cdot W \neq 0$.
7. Uzasadnij, że $V = V_\lambda$ jest nieprzywiedlna:
 - a) Uzasadnij, że $cV \subseteq \mathbf{C}c$.
 - b) Uzasadnij, że jeśli W jest podreprezentacją V , to $cW = \mathbf{C}c$ lub $cW = 0$.
 - c) Pokaż, że jeśli $cW = \mathbf{C}c$, to $W = V$.
 - d) Pokaż, że jeśli $cW = 0$ to $W \cdot W = 0$.
 - e) Bonus: $cV \neq 0$
8. Uzasadnij, że V_λ i V_μ nie są izomorficzne. W tym celu załóż $\lambda > \mu$ i zauważ, że $c_\lambda V_\lambda \neq 0$, $c_\lambda V_\mu = 0$.
9. Licząc odpowiedni ślad pokaż, że $c_\lambda \cdot c_\lambda = \frac{d!}{\dim V_\lambda} c_\lambda$.