Wstęp do teorii reprezentacji grup. Lista 7

Przypomnij sobie grupę $\mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{Sp}(1)$ *z listy 2, jej związek z kwaternionami i opis jej miary Haara z listy 4. Poniżej będziemy używać znormalizowanej miary Haara na* $\mathrm{SU}(2)$*:* $\int_{\mathrm{SU}(2)} dg = 1$*. Niech*

$$a_t = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

1. (Klasy sprzężoności w $\mathrm{SU}(2)$) Uzasadnij, że każdy element $\mathrm{SU}(2)$ jest sprzężony z macierzą a_t dla dokładnie jednego $t \in [0, \pi]$. Uzasadnij, że kwaternionowy opis zbioru elementów $\mathrm{SU}(2)$ sprzężonych z a_t wygląda tak:

   $$\{a\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \mid a = \cos t, b^2 + c^2 + d^2 = \sin^2 t\};$$

   zbiór ten jest więc dwuwymiarową sferą o promieniu $\sin t$. (Wsk.: ślad.)
2. (Całkowanie funkcji klas) Niech $f \in \mathbf{C}_{\mathrm{class}}\mathrm{SU}(2)$. Uzasadnij, że

   $$\int_{\mathrm{SU}(2)} f(g)\,dg = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(a_t) \sin^2(t)\,dt$$

Identyczność ($\rho\colon \mathrm{SU}(2) \ni g \mapsto g \in \mathrm{GL}(\mathbf{C}^2)$) *jest reprezentacją* $\mathrm{SU}(2)$ *na* $\mathbf{C}^2$*. Niech* $\rho_n = S^n\rho$ *będzie jej* n*-tą potęgą symetryczną - reprezentacją* $\mathrm{SU}(2)$ *na* $S^n(\mathbf{C}^2)$*. Niech* χ_n *będzie charakterem* ρ_n*; niech* $f_n(t) = \chi_n(a_t)$*.* $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

3. (Charaktery jawnie) Udowodnij, że

   $$f_n(t) = e^{-int} + e^{-i(n-2)t} + \ldots + e^{i(n-2)t} + e^{int} = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-i(n+1)t}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{\sin{(n+1)t}}{\sin t}.$$

4. (Nieprzywiedlność) Sprawdź, że $\int_{\mathrm{SU}(2)} |\chi_n(g)|^2 dg = 1$; stąd wynika, że ρ_n jest reprezentacją nieprzywiedlną.
5. (Zupełność charakterów) Przypomnij sobie / wywnioskuj z tw. Petera–Weyla, że dla zwartej grupy G charaktery nieprzywiedlnych reprezentacji tworzą ortonormalną bazę przestrzeni

   $$L^2_{\mathrm{class}}(G) = \{f \in L^2(G) \mid (\forall g, h \in G)(f(ghg^{-1}) = f(h))\}.$$

6. (Stone–Weierstrass) Zauważ, że

   $$(*) \qquad f_n(t) f_k(t) = f_{n+k}(t) + f_{n+k-2}(t) + \ldots + f_{|n-k|}(t)$$

   i wywnioskuj stąd, że liniowa podprzestrzeń $C[0, \pi]$ rozpięta przez $\{f_j \mid j = 0, 1, \ldots\}$ jest podalgebrą. Pokaż, że ta podalgebra rozdziela punkty, że nie znika w żadnym punkcie... że jest gęsta w $C[0, \pi]$.

7. (Innych nie ma) Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że układ $\{\chi_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ jest ortonormalną bazą $L^2_{\text{class}}\mathrm{SU}(2)$; i dalej, że każda nieprzywiedlna reprezentacja $\mathrm{SU}(2)$ jest izomorficzna z pewnym ρ_n.
8. (Iloczyny tensorowe) Rozłóż $\rho_n \otimes \rho_k$ na składowe nieprzywiedlne. (Wsk.: $(*)$)
9. (Wielomiany ortogonalne) Niech $x\colon [0, \pi] \ni t \mapsto \cos t \in [-1, 1]$. Uzasadnij, że dla każdego n istnieje wielomian U_n stopnia n, taki że $f_n(t) = U_n(x(t))$. Udowodnij, że wielomiany U_n tworzą ortonormalną bazę przestrzeni $L^2([-1, 1], \mu)$ dla pewnej – jakiej? – miary μ. Z jakim nazwiskiem wiąże się ten układ wielomianów?
(Wsk.: $f_n(t) - f_1(t)^n$ jest kombinacją $f_j(t)$ z $j < n$.)
10. (Deser) Z zadania 8 wydedukuj, dla całkowitych dodatnich a, b, c, wartość całki

$$\int_0^\pi \frac{\sin at \cdot \sin bt \cdot \sin ct}{\sin t} dt.$$