

## Wstęp do teorii reprezentacji grup. Lista 8

1. Niech  $\pi: G \rightarrow \text{GL}(V)$  będzie unitarną nieprzywiedlną (skończenie wymiarową) reprezentacją zwartej grupy  $G$ . Wykaż, że zbiór  $\{\pi(g) \mid g \in G\}$  liniowo generuje  $\text{End}(V)$ .
2. Opisz nieprzywiedlne reprezentacje grupy  $\text{SO}(3)$  i ich charaktery.  
(Wsk.  $\text{SO}(3) \simeq \text{SU}(2)/\{\pm I\}$ )
3. Grupa  $\text{SO}(3)$  działa zachowując pole na dwuwymiarowej sferze  $S^2$ , co prowadzi do unitarnej reprezentacji tej grupy na  $L^2(S^2)$ . Opisz rozkład tej reprezentacji na nieprzywiedlne składniki:
  - a) Uzasadnij, że funkcje  $f: S^2 \rightarrow \mathbf{C}$  zadane przez zespolone wielomiany trzech zmiennych  $x, y, z$  tworzą gęstą podalgebrę w  $L^2(S^2)$ .
  - b) Niech  $\mathcal{P}(n)$  będzie przestrzenią wielomianów jednorodnych stopnia  $n$ , zaś  $\mathcal{P}(n)$  podprzestrzenią  $L^2(S^2)$  zadaną przez wielomiany z  $\mathcal{P}(n)$ . Uzasadnij, że  $\mathcal{P}(n)$  jest podreprezentacją  $L^2(S^2)$ .
  - c) Uzasadnij, że  $\dim \mathcal{P}(n) = \dim P(n)$ . Policz ten wymiar.
  - d) Uzasadnij, że  $\mathcal{P}(n-2)$  jest podprzestrzenią  $\mathcal{P}(n)$ . Jaki jest jej kowymiar?
  - e) Uzasadnij, że funkcja  $F_n$  zadana przez wielomian  $(x+iy)^n$  jest wektorem własnym obrotu  $R_z(\theta)$  wokół osi  $z$ ; znajdź wartość własną w zależności od kąta  $\theta$  tego obrotu. Co potrafisz powiedzieć o reprezentacji  $\text{SO}(3)$  w której jest wektor własny obrotu  $R_z(\theta)$  o takiej wartości własnej?
  - f) Analizując indukcyjnie strukturę  $\mathcal{P}(n)$  uzasadnij, że  $F_n \notin \mathcal{P}(n-2)$ , i że  $\mathcal{P}(n)$  rozkłada się na sumę  $\mathcal{P}(n-2)$  i jednej (której?) reprezentacji nieprzywiedlnej.
4. Zapewne wiesz, co to jest laplasjan w  $\mathbf{R}^3$ . Spróbuj zdefiniować laplasjan w  $S^2$ . Powiąż poprzednie zadanie z rozkładem  $L^2(S^2)$  na przestrzenie własne tego laplasjanu.
5. Niech kolekcja funkcji  $f_\alpha$  będzie bazą ortonormalną  $L^2(X)$ , zaś  $g_\beta \in L^2(Y)$ . Uzasadnij, że funkcje  $f_\alpha \otimes g_\beta$  tworzą ortonormalną bazę  $L^2(X \times Y)$ .  $[(f_\alpha \otimes g_\beta)(x, y) := f_\alpha(x)g_\beta(y)]$
6. Niech  $k \in L^2(X \times Y)$ . Zdefiniujmy operator  $T_k: L^2(Y) \rightarrow L^2(X)$  wzorem

$$(T_k f)(x) = \int_{X \times Y} k(x, y) f(y) dy.$$

Udowodnij, że  $T_k$  jest operatorem Hilberta–Schmidta: dla pewnej/każdej ortonormalnej bazy  $e_n$  przestrzeni  $L^2(Y)$  szereg  $\sum_n \|T_k e_n\|^2$  jest zbieżny. Oszacuj też normę operatorową  $T_k$  w terminach  $k$ .

7. Niech  $G$  będzie grupą zwartą. Dla  $\varphi \in C(G)$  określamy operator splotu  $T_\varphi$  na  $L^2(G)$  wzorem

$$(T_\varphi f)(x) = (f * \varphi)(x) = \int_G f(y) \varphi(y^{-1}x) dy.$$

- a) Uzasadnij, że jest to operator Hilberta–Schmidta.
- b) Uzasadnij, że jest on przeplataczem lewej reprezentacji regularnej:  $T_\varphi \circ \lambda_G(g) = \lambda_G(g) \circ T_\varphi$ .
- c) Uzasadnij, że dla każdego  $f \in L^2(G)$  funkcja  $T_\varphi f$  jest ciągła.

8. Niech  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  będzie **nieprzywiedlną** unitarną reprezentacją zwartej grupy  $G$ . Dla  $u, v \in V$  określamy współczynnik macierzowy  $c_{u,v}$  jako następującą funkcję na  $G$ :  $c_{u,v}(g) = \langle \rho(g)u, v \rangle$ .

- a) Uzasadnij, że przy ustalonym niezerowym  $v \in V$  odwzorowanie  $V \ni u \mapsto c_{u,v} \in L^2(G)$  reprezentacji  $\rho$  w prawą reprezentację regularną  $\rho_G$  grupy  $G$  jest niezerowym przeplataczem – włożeniem  $V$  w  $L^2(G)$ , w dodatku, po ewentualnym przeskalowaniu, unitarnym.
- b) Uzasadnij, że istnieje (niezerowa) stała  $C$ , taka że dla dowolnych  $u, v, w, z \in V$  zachodzi

$$\langle c_{u,v}, c_{w,z} \rangle = C \cdot \langle u, w \rangle \cdot \overline{\langle v, z \rangle}.$$