Wstęp do teorii reprezentacji grup. Lista 9

1. Niech $C_+(S^2)$ będzie przestrzenią ciągłych funkcji parzystych (czyli spełniających warunek $f(x) = f(-x)$) na sferze S^2. Rozważmy operator $J\colon C_+(S^2) \to C_+(S^2)$ zadany wzorem:
$$(Jf)(x) = \int_{S^2 \cap x^\perp} f \, d\ell.$$
(Całkujemy po kole wielkim leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do wektora wodzącego punktu x.) Udowodnij, że operator J jest różnowartościowy. Innymi słowy: parzystą funkcję na sferze można odtworzyć znając jej całki po kołach wielkich.
[Wsk. Zauważ, że operator J jest przeplataczem reprezentacji $\mathrm{SO}(3)$ na $C_+(S^2)$. Użyj rozkładu reprezentacji $L^2(S^2)$ na nieprzywiedlne składniki omawianego na poprzedniej liście. Uzasadnij, że każdy nieprzywiedlny składnik jest przestrzenią własną J. Co potrzebujesz wiedzieć o wartościach własnych?]

2. Niech A będzie algebrą operatorów na przestrzeni Hilberta H, która: (a) składa się z operatorów zwartych, (b) jest zamknięta na sprzężenie, oraz (c) jest niezdegenerowana, tj. dla każdego niezerowego $v \in H$ istnieje $T \in A$, takie że $Tv \neq 0$.
Udowodnij, że wtedy H rozkłada się w ortogonalną sumę prostą domkniętych A-nieprzywiedlnych podprzestrzeni; ponadto, w rozkładzie każdy nieprzywiedlny składnik pojawia się ze skończoną krotnością.
   a) Wykaż, że w algebrze A jest niezerowy operator samosprzężony T.
   b) Niech λ będzie niezerową wartością własną T. Załóżmy, że $V < H$ jest domknięta i A-niezmiennicza. Załóżmy też, że przestrzeń własna T w V odpowiadająca wartości λ ma najmniejszy możliwy dodatni wymiar (przy wszystkich dopuszczalnych V). Uzasadnij, że V jest wtedy A-nieprzywiedlna (nie ma nietrywialnych A-niezmienniczych domkniętych podprzestrzeni). [*To jest niestety nieprawda. Ale jeśli wziąć niezerowy $v \in V$ spełniający $Tv = \lambda v$, to domknięcie Av już będzie A-nieprzywiedlne.*]
   c) Dokończ.

3. Niech G będzie grupą lokalnie zwartą, zaś $\mathcal{A} = C_c(G)$ algebrą funkcji ciągłych o zwartych nośnikach, ze splotem jako mnożeniem. Załóżmy, że $\rho\colon G \to B(H)$ jest ciągłą reprezentacją grupy G na przestrzeni Hilberta H. Dla $\varphi \in \mathcal{A}$ określamy
$$\rho(\varphi)(v) = \int_G \varphi(g)\rho(g)v \, dg,$$
oraz $A = \{\rho(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{A}\}$.
   a) Uzasadnij, że A jest algebrą operatorów na H, zamkniętą na sprzężenie i niezdegenerowaną – ale niekoniecznie złożoną z operatorów zwartych.
   b) Uzasadnij, że domknięta podprzestrzeń $V < H$ jest A-podreprezentacją wtedy i tylko wtedy, gdy jest G-podreprezentacją; i jest A-nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy jest G-nieprzywiedlna.

[Wsk. użyj jedności aproksymatywnej.]

4. Załóżmy, że Γ jest dyskretną i kozwartą podrupą unimodularnej lokalnie zwartej grupy G (np. $\mathbf{Z}^n < \mathbf{R}^n$).
   a) Przekontempluj przestrzeń $L^2(\Gamma\backslash G)$; w szczególności uzasadnij, że miara Haara na G indukuje skończoną prawoniezmienniczą miarę na zwartej przestrzeni $\Gamma\backslash G$.
   b) Uzasadnij, że wzór $(\rho(g)f)(\Gamma x) := f(\Gamma xg)$ definiuje reprezentację unitarną G na $L^2(\Gamma\backslash G)$.
   c) Udowodnij, że $A = \{\rho(\varphi) \mid \varphi \in C_c(G)\}$ jest podalgebrą $B(L^2(\Gamma\backslash G))$ spełniającą wszystkie założenia zadania 2.
   d) Udowodnij, że reprezentacja grupy G na $L^2(\Gamma\backslash G)$ rozkłada się w ortogonalną sumę prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji unitarnych, w której każdy składnik występuje ze skończoną krotnością.
5. Obmyśl ciekawsze przykłady dyskretnych kozwartych podgrup niż $\mathbf{Z}^n < \mathbf{R}^n$.
   Czy np. umiesz znaleźć kozwartą dyskretną Γ w $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$?
   Dlaczego $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z}) < \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ nie jest dobrym przykładem?