Objętość V kuli czterowymiarowej $x^2+y^2+z^2+u^2 \le R^2$
(czterowymiarowa analogia objętości)

$$\frac{1}{2}V = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}\, d\Omega =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}\, dz \right) d\omega =$$

zauważamy, że nawias to pole półkola

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \frac{1}{2}\pi \sqrt{R^2-x^2-y^2}^{\,2}\, d\omega =$$

i radośnie pędzimy do układu biegunowego (nie zapominając o jakobianie)

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{2}\pi(R^2-r^2)\cdot r\, dr\, d\varphi = \qquad \text{teraz 'świat już jest wielomianowy'}$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_0^R \frac{1}{2}\pi(R^2r-r^3)\, dr = \pi^2\cdot\left[\frac{1}{2}R^2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^R = \frac{1}{4}\pi^2R^4.$$

Zatem $V = \frac{1}{2}\pi^2R^4$.

Niech $V_n(R)$ oznacza n-objętość n wymiarowej kuli $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \le R^2$ zawartej w $\mathbb{R}^n$. Poniżej mamy pomysły na obliczenie $V_5(R)$:

(A) (kiepski)

$$\frac{1}{2}V_5(R) = \iiiint\limits_{x^2+y^2+z^2+u^2\le R^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2-u^2}\, d\Omega_4 =$$

$$= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \frac{1}{2}V_2(\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2})\, d\Omega_3 = \ldots$$

(B) (dwa razy biegunowy)

$$\frac{1}{2}V_5(R) = \iiiint\limits_{x^2+y^2+z^2+u^2\le R^2} \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2-u^2}\, d\Omega_4 =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \left(\iint\limits_{z^2+u^2\le R^2-(x^2+y^2)} \sqrt{(R^2-x^2-y^2)-z^2-u^2}\, d\omega \right) d\Omega_2 = \ldots$$

(C) (indukcyjny)

$$V_5(R) = \int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\le R^2} 1\, d\Omega_5 = \int\limits_{-R}^{R} \left(\iiiint\limits_{x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\le R^2-x_1^2} 1\, d\Omega_4 \right) dx_1 =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} \left(V_4\left(\sqrt{R^2-x_1^2}\right)\right) dx_1 = \int\limits_{-R}^{R} \left(\frac{\pi^2}{2}(R^2-x_1^2)^2\right) dx_1 = \ldots = \frac{8\pi^2}{15}R^5$$

Uwaga 1. Dla $n=6$ warto zmodyfikować pomysł C (indukcyjny):

$$V_6(R) = \int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2\le R^2} 1\, d\Omega_6 = \iint\limits_{x_1^2+x_2^2\le R^2} \left(\iiiint\limits_{x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2\le R^2-(x_1^2+x_2^2)} 1\, d\Omega_4 \right) d\omega_2 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R V_4(\sqrt{R^2-r^2})\cdot r\, dr\, d\varphi = \ldots = \frac{\pi^3}{6}R^6$$

Uwaga 2. Ogólnie: $V_{n+1}(R) = \int_{-R}^{R} V_n(x)\, dx$,

choć dla parzystych n wygodniej tak: $V_{n+2}(R) = \int\limits_{x_1^2+x_2^2\le R^2} V_n(\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2})\, d\omega_2$.