

### ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 1.

Parametryzacją linii (łuku, krzywej)  $K \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy funkcję  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , o dziedzinie  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  taką, że  $F[[a, b]] = K$ .

Na przykład

$$F : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, F(t) = (3 \cos |t|, 3 \sin |t|)$$

jest parametryzacją półokręgu  $K$  o środku  $(\dots, \dots)$  i promieniu  $\dots$ .

Tą parametryzację można notować inaczej:

$$x(t) = 3 \cos |t|, y(t) = 3 \sin |t|, t \in [-\pi, \pi]$$

lub

$$x = 3 \cos |t|, y = 3 \sin |t|, -\pi \leq t \leq \pi,$$

lub

$$x_t = 3 \cos |t|, y_t = 3 \sin |t|, -\pi \leq t \leq \pi.$$

**Inną** parametryzacją  $K$  jest:

$$x = 3 \cos |t|, y = 3 \sin |t|, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

Parametryzację linii  $K$  można interpretować jako opis ruchu punktu obiegającego całe  $K$  w czasie od  $a$  do  $b$ . W momencie  $t$  tego ruchu, prędkość  $(x'(t), y'(t))$  jest wektorem stycznym do  $K$  w punkcie  $(x(t), y(t))$ , a szybkość jest długością tego wektora (o ile istnieją pochodne  $x'(t), y'(t)$ ).

Długość linii  $K$  tylko w niektórych parametryzacjach jest równa drodze, jaką przebywa punkt ją opisujący.

1. Funkcja  $F : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $F(t) = (t^2 + 1, 3t^2 + 4)$  przekształca punkty przedziału ..... na punkty płaszczyzny; np.:  $F(-1) = (2, \dots)$ ,  $F(-0.5) = \dots$ .

a) Czy p-ktky  $(3.25, 10.75)$ ,  $(1.09, 4.27)$ ,  $(2.69, 9.07)$  należą do zbioru wartości  $F$ ?

b) Zbiorem wartości tej funkcji jest odcinek – jaki?

UWAGA. Mówimy też:  $x(t) = t^2 + 1$ ,  $y(t) = 3t^2 + 4$ ,  $-1 \leq t \leq 2$  jest jedną z możliwych *parametryzacji* tego odcinka, inną jest:  $x = t^2 + 1$ ,  $y = 3t^2 + 4$ ,  $0 \leq t \leq 2$ . Czym się różnią?

2. Zaznacz łuki i podaj ich długości:

a)  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t + 1$ ,  $t \in [0, \pi]$

b)  $x = \sin t$ ,  $y = \sin t + 1$ ,  $t \in [0, \pi]$

c)  $x = \cos(\sin t)$ ,  $y = \sin(\sin t) + 1$ ,  $t \in [0, \pi]$

UWAGA. Na ogół długość linii (łuku) nie jest równa długości wędrówki opisanej daną parametryzacją. Jak to jest w zad. 1 i 2?

3. Koło  $K_t$  o promieniu ..... toczy się BEZ poślizgu po osi ..... . Jego środek  $S_t$  ślizga się po prostej .....

Parametryzacja  $x_t = \dots - \dots$  ,  $y_t = 1 - \dots$  ,  $t \in \mathbb{R}$  opisuje *cykloidę*, linię jaką wykreśla punkt  $P_t = (x_t, y_t)$  nieruchomy względem toczącego się koła  $K_t$ , leżący na brzegu koła, który w chwili  $t = 0$  jest w punkcie  $(\dots, \dots)$ .

a) Prędkość (wektor!) punktu  $P_t$  w chwili  $t = \frac{2\pi}{3}$  jest równa ..... ,  
a w chwili  $t = \frac{\pi}{2}$  jest równa .....

b) Największa jego szybkość (liczba!) jest dla  $t = \dots$

c) Może się wydawać, że dla  $t = 2\pi$  wektor prędkości gwałtownie zmienia kierunek, ale TAK NIE JEST,  
bowiem

.....  
.....

d) Środek  $M_0$  promienia  $S_0P_0$  koła  $K_0$  wyznacza inną linię o parametryzacji:

$$\hat{x}_t = \dots, \hat{y}_t = \dots, t \in \mathbb{R}$$

e) Punkt  $N_0 = 1,2 \cdot P_0 + (-0,2) \cdot S_0$  przedłużenia promienia  $S_0P_0$  koła  $K_0$  wyznacza ciekawą linię o parametryzacji:

$$\bar{x}_t = \dots, \bar{y}_t = \dots, t \in \mathbb{R}$$

Ciekawe jest to, że w chwili  $t = 2\pi$  prędkość punktu  $N_t$ , równa ..... jest skierowana ....., co oznacza, że .....

4. Czy jadące pojazdy  $A$  i  $B$ :

$$x_A = t + 1, y_A = 4t + 3, t \in \mathbb{R}_+, \quad x_B = t - 5, y_B = 2t + 1, t \in \mathbb{R}_+$$

kiedyś się zderzą? Jeśli tak, to kiedy? Jeśli nie, to jak blisko miną się?