Analiza matematyczna 3, Notatki z wykładu 10b

układ kartezjański (x,y,z)		układ cylindryczny (r,φ,h)	
	$\leftrightsquigarrow$ $x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $z = h$		
$(1,1,1)$	$\leftrightsquigarrow$	$r=\sqrt{2},\ \varphi=\frac{\pi}{4},\ h=1$	
$(-3,3,-2)$	$\leftrightsquigarrow$	$r=$ ...... , $\varphi=$ ...... , $h=$	
(...... , ... , ...)	$\leftrightsquigarrow$	$r=7,\ \varphi=\frac{7\pi}{4},\ h=-2$	
$x,y,z\geq 0$	$\leftrightsquigarrow$	....	
....	$\leftrightsquigarrow$	$r\leq 2,\ \varphi\in[\pi,\frac{3}{2}\pi],\ 1\leq h\leq 5$	
....	$\leftrightsquigarrow$	$r=\sin\varphi,\ h=1,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$	Wsk.: Pomnóż pierwsze równanie przez r.
....	$\leftrightsquigarrow$	$r=\cos\varphi,\ 0\leq h\leq r,\ \lvert\varphi\rvert\leq\frac{\pi}{2}$	
....	$\leftrightsquigarrow$	$r=\dfrac{2}{\sin\varphi-3\cos\varphi},\ h\in[0,1]$	Wsk.: Pomnóż równanie przez mianownik.
$y=x+\pi,\ z=0$	$\leftrightsquigarrow$	....	
$x^2+y^2-6y=0,\ 1\leq z\leq 4$	$\leftrightsquigarrow$	....	
$z^2\leq x^2+y^2\leq 3$	$\leftrightsquigarrow$	....	

Ściąga Zmiana całki potrójnej w układzie kartezjańskim na całkę potrójną w układzie cylindrycznym

$$\iiint\limits_{W} f(x,y,z)\,d\omega = \iiint\limits_{\overline{W}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\cdot r\,d\bar{\omega}.$$

Przykład A.

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 4\\ 1\le z\le 3}} xy+z\,d\omega = \iiint\limits_{\substack{\varphi\in[0,2\pi]\\ r\le 2,\ h\in[1,3]}} (r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi+h)\cdot r\,d\bar{\omega} = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_1^3 \frac{1}{2}r^3\sin 2\varphi + hr\,dh\,dr\,d\varphi =$$

Przykład B.

$$\iiint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 4} z\,d\omega = \iiint\limits_{\substack{\varphi\in[0,2\pi]\\ r\le 4,\ r\le h\le 4}} h\cdot r\,d\bar{\omega} = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_r^4 hr\,dh\,dr\,d\varphi = \ ......$$

Przykład C.

Niech $S = \{(x,y,z): 0\le z\le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$ i $W = \{(x,y,z): x^2+y^2\le x\}$.
Oblicz objętość $S\cap W$.

$$\iiint\limits_{S\cap W} 1\,d\omega = \iiint\limits_{\substack{\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]\\ r\le\cos\varphi,\ 0\le h\le 1-r}} 1\cdot r\,d\bar{\omega} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\varphi}\int_0^{1-r} r\,dh\,dr\,d\varphi = \ ......$$