Analiza matematyczna 3, Notatki z wykładu 11a

Niech $f(x,y)$ będzie określona na krzywej $L \subset \mathbb{R}^2$. Dla podziału $L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$ o długościach Δs_i i dla punktów $(x_i, y_i) \in L_i$ tworzymy sumę $\sum\limits_{i \le n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$. Napis

$$\int\limits_L f(x,y)\, ds \approx \sum_{i \le n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$$

oznacza, że *całka krzywoliniowa nieskierowana* z f po L jest przybliżana przez owe sumy tym lepiej im drobniejszy jest podział.

Całkę tę można interpretować wielorako, np.:

– jako minimalny czas przejazdu trasy L (zgodny z przepisami), gdzie f podaje ograniczenie maksymalnej szybkości ,

– jako pole płotu (jednej strony) ustawionego na linii L o sztachetach o szerokościach ...... i wysokościach $f(x_i, y_i)$,

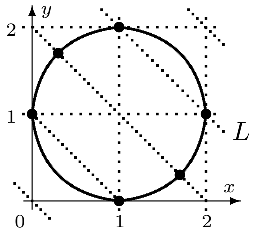
– jako koszt ułożenia rurociągu wzdłuż linii L, gdzie $f(x_i, y_i)$ mówi o cenie budowy 1 metra w miejscu (x_i, y_i).

– ......

Okrąg L z rysunku obok jest podzielony na ...... części o długościach ...... , ... , ... , ... , ... , ...

Funkcja $f(x,y) = [x+y]^2$ jest na tych częściach stała (niemal). Zatem wybierając punkty z tych części (poza kropami) mamy:

$\int_L [x+y]^2\, ds = 9 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \frac{\pi}{2} + \ldots \cdot \frac{\pi}{4} + \ldots \cdot \frac{\pi}{4} = 7\pi.$



Przykłady. (na palcach)

a) Dla $K =$ brzeg $[0,1]^2$ i $f(x,y) = y + 1$:

$$\int\limits_K f(x,y)\, ds = \int\limits_{[0,1]\times\{0\}} \ldots\ldots\ ds + \int\limits_{\{1\}\times[0,1]} \ldots\ldots\ ds + \int\limits_{[0,1]\times\{1\}} \ldots\ldots\ ds + \int\limits_{\ldots\ldots\ldots\ldots} \ldots\ldots\ ds =$$

$$=$$

b) Dla $V = \{(x, |x|) : |x| \le 1\}$ i $f(x,y) = \pi x + y\sqrt{3}$:

$$\int\limits_V f(x,y)\, ds = \pi \cdot \int\limits_V \ldots\ ds + \ldots \cdot \int\limits_V \ldots\ ds =$$

$$=$$

c) $\displaystyle\int\limits_{\substack{x^2+y^2=1 \\ x,y \ge 0}} \arcsin y\, ds =$

Tw. Gdy L ma paremetryzację $(x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ klasy $\mathcal{C}^1$, to

$$\int\limits_L f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Przykład.

a) Dla $L = \{(x,x^2) : x \in [0,1]\}$ z parametryzacją: $x = t,\ y = ...,\ t \in [...,...]$:

$$\int\limits_L \frac{y^3}{\sqrt{1+4x^2}}\,ds = \int\limits_0^1 \frac{t^6}{\sqrt{1+4t^2}} \cdot \sqrt{(\ ......\ )^2 + (\ ......\ )^2}\,dt = \ ....$$

b) $\displaystyle\int\limits_{\substack{x^2+y^2=4\\ y\le 0}} \sin(x^9) + 2y^2\,ds =$

Tw. Gdy $\vec{r} : [a,b] \to \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to

$$\int\limits_\Gamma f\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Wniosek. Gdy $\vec{r} : [a,b] \to \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją (jednokrotną) łuku Γ, to długość tego łuku można opisać całką:

$$|\Gamma| = \int\limits_\Gamma 1\,ds = \int\limits_a^b 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Przykład. (za żmudny)
Gdy Γ jest łamaną ABC, gdzie $A(0,1,0), B(2,2,3), C(2,2,1)$, to parametryzujemy oddzielnie odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ np.

$$\vec{r}_{AB} : [0,1] \to \overline{AB},\ \vec{r}_{AB} = (2t, 1+t, 3t) \quad \text{i} \quad \vec{r}_{BC} : [0,2] \to \overline{BC},\ \vec{r}_{BC} = (2,2,3-t).$$

Wtedy $\int_\Gamma ... = \int_{\overline{AB}} ... + \int_{\overline{BC}} ...$

czyli

$$\int\limits_\Gamma xe^{y-1} + 2z ds = \int\limits_0^1 (2te^t + 6t) \cdot \sqrt{2^2+1^2+3^2}dt + \int\limits_0^2 (2e^1 + 6 - 2t) \cdot \sqrt{0^2+0^2+(-1)^2}dt =$$

$$= \sqrt{14} \cdot [2te^t - 2e^t + 3t^2]_0^1 + [(2e+6)t - t^2]_0^2 = \ldots = 5\sqrt{14} + 4e + 8\ .$$