Analiza matematyczna 3. Notatki 11b.

Całka powierzchniowa niezorientowana

Niech $f(x,y,z)$ będzie określona na powierzchni S. Podział $\omega = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ powierzchni S na 'prawie rozłączne płaty' o polach $|S_i|$ i wybór punktów $a_i \in S_i$ wyznacza pewne przybliżenie **całki powierzchniowej niezorientowanej**:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS \approx \sum_{i=1}^{m} f(a_i)\cdot|S_i|$$

Dokładniej: jeśli dla coraz drobniejszych podziałów (o średnicach zbieżnych do 0) sumy po prawej stronie są coraz bliżej pewnej liczby (niezależnie od wyboru punktów), to tę liczbę nazywamy całką powierzchniową niezorientowaną funkcji f po powierzchni S.

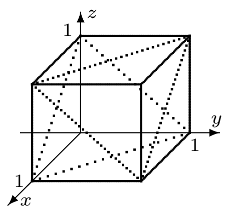
Interpretacje. $\iint_S f(x,y,z)\, dS$:
- masa powierzchni S, której gęstość w punkcie (x,y,z) ma wartość $f(x,y,z)$ [kg/m^2],
- koszt wyłożenia S kafelkami, których cena w (x,y,z) wynosi $f(x,y,z)$ [zł/m^2].

1. Na powierzchni S sześcianu $[0,1]^3$ $f(x,y,z) = [x+y+z]+\pi$ przyjmuje wartości: $0+\pi, 1+\pi$, ...Zatem

$\iint\limits_S [x+y+z]+\pi\, dS = (0+\pi)\cdot(3\cdot\frac{1}{2}) +$ ...... $+$ ...... $=$ ....

Dla funkcji $f(x,y,z) = [z]\cdot[y+7]$ mamy:

$\iint\limits_S [z]\cdot[y+7]\, dS = \iint\limits_{\ldots\ldots\ldots\ldots} [z]\cdot[y+7]\, dS =$



Tw. Jeśli powierzchnia S jest wykresem funkcji gładkiej $g(x,y)$ określonej na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$, czyli gdy $S = \{(x,y,z) : z = g(x,y),\ (x,y)\in D\}$, to całkę powierzchniową z funkcji $f : S \to \mathbb{R}$ zamieniamy na całkę podwójną:

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_D f(x,y,g(x,y))\cdot\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}\, d\omega}$$

2. $S = \{(x,y,z) : 2x+3y+z = 6,\ x,y,z \geq 0\}$ jest wykresem f-cji $g(x,y) = 6-2x-$... o dziedzinie $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3,$ ...... $\leq y \leq$ .... $\}$; zatem

$$\iint\limits_S (z-6)^2 dS = \iint\limits_D (6-2x-3y-6)^2\cdot\sqrt{1+(-2)^2+\ \ldots}\ d\omega = \int_0^3 \int_0^{\ldots\ldots} \ldots\ldots\ dy dx = \ldots$$

3. Półsfera $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 2z, z \geq 1\}$ jest wykresem funkcji $g(x,y) =$ ....o dziedzinie $D = \{(x,y) :$...............$\}$; zatem

$$\iint\limits_S z\, dS = \iint\limits_D (\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ )\cdot\sqrt{1+(\ \ldots\ldots\ )^2+(\ \ldots\ldots\ )^2}\, d\omega = \ldots$$

4. Dla brzegu S czworościanu $0ABC$ (p.rys.) całki powierzchniowe można obliczyć 'na palcach':

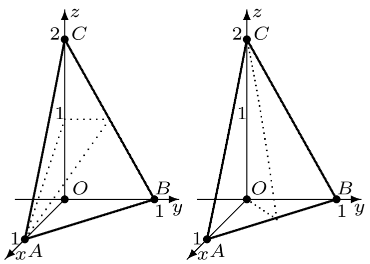
a) $\iint_S e^{[x+y]}\, dS =$ .... $= e^0 \cdot |S| =$ ...

b) $\iint_S e^{[x-y]}\, dS =$ ....

c) $\iint_S e^{[x+z]}\, dS =$ ....

d) $\iint_S e^{[x+y+z]}\, dS =$ ....

Do których całek pomocne są rysunki (z prawej)?



4'. Oblicz. (Poniższe całki opisują objętości pewnych ostrosłupów; opisz je (słowami).)

a) $\iint\limits_{ABC} z\, dS =$ obj. ostrosłupa o podstawie ΔABC i wysokości 2,

b) $\iint\limits_{ABC} x\, dS =$

c) $\iint\limits_{ABC} x + y\, dS =$

5. Oblicz $\displaystyle\iint\limits_{\substack{z+x^2+y^2=1 \\ z\geq 0}} \sqrt[3]{1+4x^2+4y^2}\, dS =$