Analiza matematyczna 3, Notatki z wykładu 11c

Bywa, że złoty łańcuszek jest na tyle cienki, że chcemy go uważać za okrąg L

$$L: \quad x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, 2\pi].$$

Jednak waga nam mówi, że ogniwa nie są jednakowe. Dokładniej jego gęstość (gęstość liniowa) jest równa: $g(x, y) = 3y^2$, to znaczy dla małego kawałeczka iloraz masy przez długość jest równy $3y^2$. Wtedy masa całego łańcuszka jest równa $M = \int\limits_L g(x, y)\, dl$.

Podobnie rzecz się ma ze srebrną paterą S

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \le 0.$$

Waga w środku jest dużo większa niż przy brzegach (jest tam grubsza), np. jej gęstość (gęstość powierzchniowa) jest równa: $g(x, y, z) = 7|z|$, to znaczy dla małego kawałeczka iloraz masy przez pole powierzchni jest równy $7z$. Wtedy masa całej patery jest równa $M = \iint\limits_S g(x, y, z)\, dS$.

A jak to jest z masą niejednorodnego trójkąta w $\mathbb{R}^2$ czy czworościanu w $\mathbb{R}^3$? Podobnie (ale już wystarcza 'zwykła' całka podwójna czy potrójna).

Przykład A.
Znajdź masę M pierwszego zwoju linii śrubowej $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,$ gdy gęstość w każdym punkcie jest proporcjonalna do kwadratu odległości od (0,0,0).

$$M = \int\limits_L g(x, y, z)\, dl = \int\limits_L k(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2\, dl =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} k(\sqrt{(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 + (bt)^2})^2 \cdot \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + (b)^2}\, dt = \dots$$

$$= k\sqrt{a^2 + b^2}(2a^2\pi + \tfrac{8}{3}b^2\pi^3)\ . \qquad \square$$

.

Tw. Gdy $\vec{r} : [a, b] \to \Gamma,\ \vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ, to

$$\int\limits_\Gamma f\, ds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\, dt.$$

UMOWA. Poniżej 'wyznacz' oznacza 'zapisz jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych w ukł. kartezjańskim i/lub cylindrycznym (biegunowym)'.

Przykład B. Niech T oznacza trókąt o wierzchołkach $(1,0,0),(1,1,0),(0,0,3)$. Wyznacz jego masę gdy gęstość $g=g(x,y,z)$ jest proporcjonalna do sześcianu odległości od punktu (1,1,0) i ma największą wartość równą 7

gęstość $g=g(x,y,z)=k\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}^3$.

$7=\sup g[T]=g(0,0,3)$, (argument za ostatnią równością daje geometria)

zatem

$7=k\cdot\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2+3^2}^3$

skąd

$k=\frac{7}{11^{3/2}}$.

Dalej zauważmy, że T jest wykresem funkcji $z=z(x,y)=3-3x$ o dziedzinie będącej trójkątem $D\subset\mathbb{R}^2$ o wierzchołkach $(0,0),(1,0),(1,1)$.

$$M=\iint_T g(x,y,z)\,dS=\iint_T \frac{7}{11^{3/2}}\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}^3\,dS=$$
$$=\iint_D \frac{7}{11^{3/2}}\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(3-3x)^2}^3\cdot\sqrt{1+(-3)^2+(0)^2}\,d\omega=$$
$$=\int_0^1\int_0^x \frac{7}{11^{3/2}}\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(3-3x)^2}^3\cdot\sqrt{10}\,dy\,dx \qquad \square$$

Przykład C. Niech trójkąt z Przykładu B. obraca się w stałym tempie 3 obrotów na sekundę wokół osi OZ. Wyznacz jego energię kinetyczną.

'Mały' kawałeczek ΔT z punktu (x,y,z) ma szybkość $v=3\cdot 2\pi\sqrt{x^2+y^2}$, bo w ciągu sekundy przebywa drogę $3\cdot 2\pi\sqrt{x^2+y^2}$. Ma masę $\Delta M=g(x,y,z)\cdot|\Delta T|_{pole}$. Zatem wnosi do energii kinetycznej wartość $\frac{1}{2}\cdot\Delta M\cdot v^2$.

$$E_{kin}=\iint_T \frac{1}{2}\cdot(3\cdot 2\pi\sqrt{x^2+y^2})^2\cdot\frac{7}{11^{3/2}}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}^3\,dT=$$
$$=\iint_D \frac{126\pi^2}{11^{3/2}}\cdot(x^2+y^2)\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(3-3x)^2}^3\cdot\sqrt{1+(-3)^2+(0)^2}\,d\omega=$$
$$=\int_0^1\int_0^x \frac{126\pi^2}{11^{3/2}}\cdot(x^2+y^2)\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(3-3x)^2}^3\cdot\sqrt{10}\,dy\,dx \qquad \square$$

Tw. Jeśli powierzchnia S jest wykresem funkcji gładkiej $g(x,y)$ określonej na obszarze $D\subset\mathbb{R}^2$, czyli gdy $S=\{(x,y,z):z=g(x,y),\ (x,y)\in D\}$, to całkę powierzchniową z funkcji $f:S\to\mathbb{R}$ zamieniamy na całkę podwójną:

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,y,g(x,y))\cdot\sqrt{1+(\tfrac{\partial g}{\partial x})^2+(\tfrac{\partial g}{\partial y})^2}\,d\omega}$$

Przykład D. Półsfera S ma w danym punkcie gęstość równą kwadratowi odległości od osi symetrii. Wyznacz środek masy S.

Możemy przyjąć, że $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ jest wykresem funkcji $z = z(x,y) = +\sqrt{1-x^2-y^2}$ o dziedzinie $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$.
Wtedy gęstość $g = g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}^2$.
Przy takiej gęstości środek masy leży oczywiście na osi symetrii (czyli na osi OZ).
Niech s oznacza trzecią współrzędną środka masy S.

Mamy: $s = \frac{1}{M}\iint\limits_S z \cdot g(x,y,z)\, dS$, gdzie $M = \iint\limits_S g(x,y,z)\, dS$

Obliczamy:

$$M = \iint\limits_S g(x,y,z)\, dS = \iint\limits_D (x^2+y^2) \cdot \sqrt{1 + (\tfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}})^2 + (\tfrac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}})^2}\, d\omega =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \tfrac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\, dr\, d\varphi = 2\pi \cdot \int\limits_0^1 \tfrac{r(r^2-1)+r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr = \ldots = \tfrac{4}{3}\pi.$$

Dalej:

$$s = \tfrac{1}{M}\iint\limits_S z \cdot g(x,y,z)\, dS = \tfrac{1}{\frac{4}{3}\pi}\iint\limits_S \sqrt{1-x^2-y^2} \cdot (x^2+y^2)\, dS =$$

$$= \tfrac{1}{\frac{4}{3}\pi}\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2} \cdot (x^2+y^2) \cdot \sqrt{1 + (\tfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}})^2 + (\tfrac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}})^2}\, d\omega =$$

$$= \tfrac{1}{\frac{4}{3}\pi}\iint\limits_D (x^2+y^2)\, d\omega = \tfrac{1}{\frac{4}{3}\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r^2 \cdot r\, dr\, d\varphi = \tfrac{3}{8}$$

Odp. Środek masy S leży na osi symetrii w odległości $\frac{5}{8}$ od sfery, po 'wewnętrznej' stronie sfery. □

Przykład E. Niech S oznacza stożek o wysokości 1 i promieniu podstawy 1.
Niech W oznacza walec o średnicy podstawy równej 1 i wysokości 1, którego podstawa leży na podstawie stożka i na którego powierzchni bocznej leży wysokość stożka.
Niech $V = S \cap W$. Zapisz jako całkę (lub sumę całek) iterowanych:

a) objętość V

b) pole powierzchni V

c) długość 'krawędzi' V, to znaczy zbioru tych punktów powierzchni V, które nie są gładkie (w których nie ma płaszczyzny stycznej do powierzchni).