

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NATATKI 12.0. POLA WEKTOROWE

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$. Funkcję $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywać będziemy polem wektorowym.

Na przykład dla $F(x, y) = (x + y, x^2)$ mamy $F(2, 1) = (3, 4)$ i $F(1, 3) = (4, 1)$.

Graficznie można przedstawiać F następująco:

w punkcie (x, y) zaczepiamy wektor (strzałkę) o współrzędnych $F(x, y)$,
czyli np.:

w punkcie $(2, 1)$ jest początek strzałki o współrzędnych $(3, 4)$,

w punkcie $(1, 3)$ jest początek strzałki o współrzędnych $(4, 1)$.

ZADANIE 1.

Na następnej stronie jest kilkanaście rysunków pól wektorowych.

Dopasuj podane wzory do odpowiednich rysunków.

DEFINICJA.

$f(x, y)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F} = (P, Q)$, gdy $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

$f(x, y, z)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F} = (P, Q, R)$, gdy $\vec{F} = \text{grad}(f)$.

ZADANIE 2.

Czy pole wektorowe ma potencjał? Czasami można... odgadnąć takie f , spróbuj:

a) $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ b) $\vec{F}(x, y) = (y, x)$ c) $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$

d) $\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ e) $\vec{F}(x, y) = (xy^2, x^2y + y^3)$ f) $\vec{F}(x, y) = (ye^x, e^x)$

g) $\vec{F}(x, y) = (e^x - \sqrt{2}, \frac{1}{1+y^2} + \pi)$ h) $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$

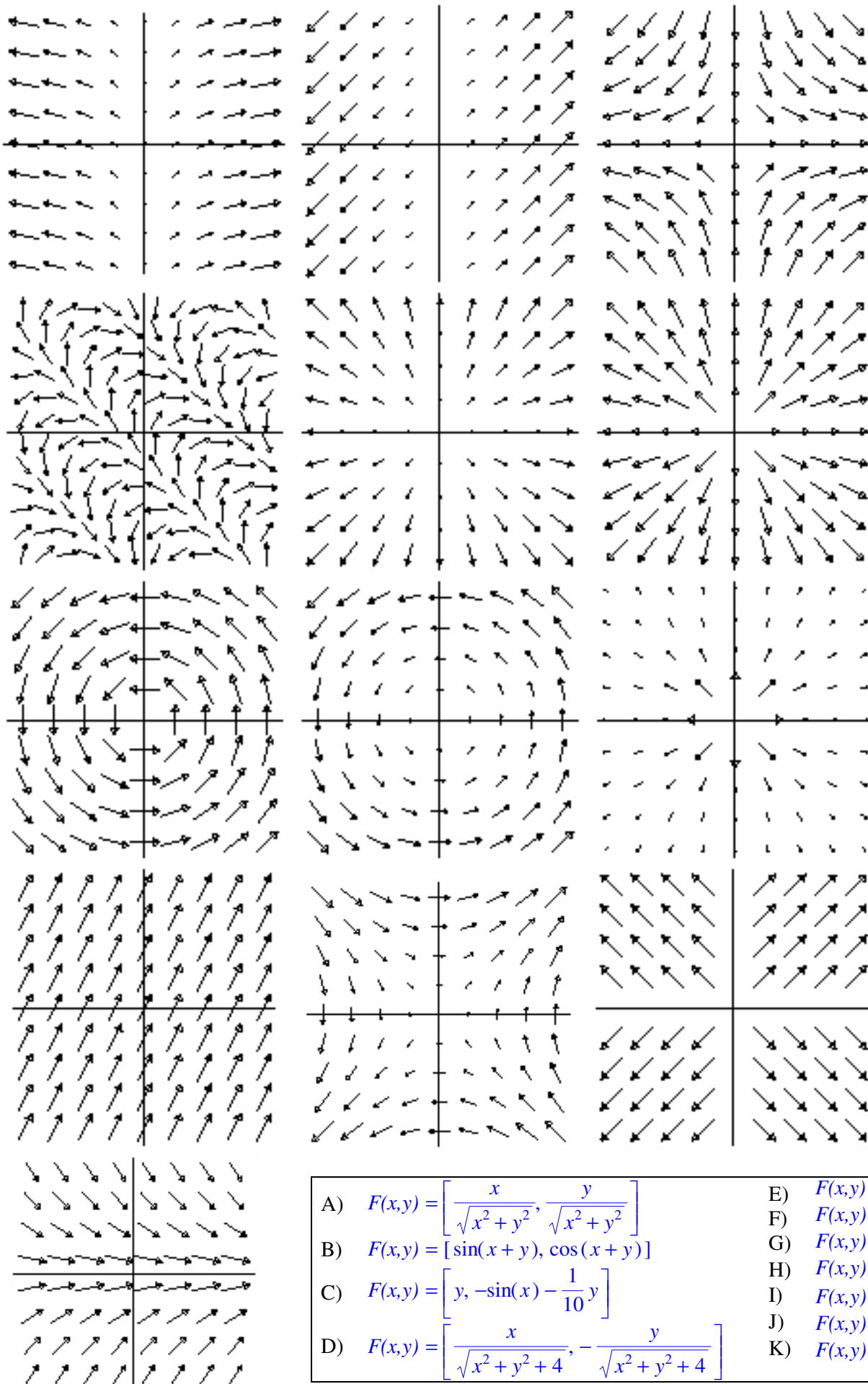
i) $\vec{F}(x, y) = (e^y, xe^y + y)$ j) $P(x, y) = y^2e^{xy}$, $Q(x, y) = (1 + xy)e^{xy}$

k) $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + 1)$ l) $P = yz$, $Q = xz$, $R = xy$

m) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + 1, 2y(z + 1), x^2 + y^2 + 3z^2)$ n) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, z, y)$

o) $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, xz)$ p) $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Odp. a) $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, d) brak, h) $f(x, y, z) = x^2yz + z$, n) $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x + yz$



- | | |
|--|-------------------------|
| A) $F(x,y) = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right]$ | E) $F(x,y) = [1, 2]$ |
| B) $F(x,y) = [\sin(x+y), \cos(x+y)]$ | F) $F(x,y) = [y, x]$ |
| C) $F(x,y) = \left[y, -\sin(x) - \frac{1}{10}y \right]$ | G) $F(x,y) = [-y, x]$ |
| D) $F(x,y) = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+4}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+4}} \right]$ | H) $F(x,y) = [y, x, x]$ |
| | I) $F(x,y) = [y, x^2]$ |
| | J) $F(x,y) = [x, y]$ |
| | K) $F(x,y) = [x, 1]$ |