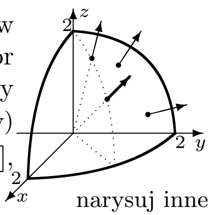
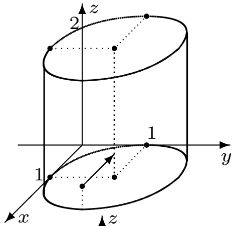
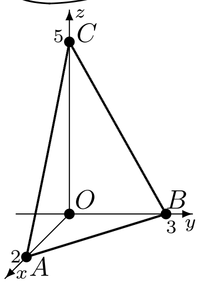
ANALIZA MATEMATYCZNA 3. $\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$ – notatki powierzchowne



1. Do powierzchni $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=4, x,y,z\ge 0\}$ w punkcie $P(x,y,z)$ można wystawić wektor normalny $\vec n$, tj. wektor prostopadły do S, o długości 1, zaczepiony w P. Wektor normalny zależy od S i P więc należałoby pisać $\vec n_S(x,y,z)$ (są dwa takie wektory) Np. $\vec n(1,1,\sqrt2) = \frac12\cdot[1,1,\sqrt2]$, $\vec n(\frac{\sqrt3}{2},\frac12,...) = \frac{1}{...}\cdot[\frac{\sqrt3}{2},...,...]$, $\vec n(\sqrt3,1,...)=\frac{1}{...}\cdot[...,...,...]$. Ogólnie: $\vec n_S(x,y,z)=\frac{1}{...}\cdot[x,y,z]$. narysuj inne



2. Dla $B=\{(x,y,z): x^2+y^2=2x+2y-1, 0\le z\le 2\}$, tj. dla pow. bocznej walca, $\vec n=[-1,0,0]$ jest wektorem normalnym do B w punkcie $(2,1,\frac14)$ skierowanym do wewnątrz. Ten sam wektor $\vec n$ jest normalny dla punktów: $(2,...,1)$, $(...,...,\frac53)$, $(...,...,...)$ ... . $\vec n(1+\frac{\sqrt2}{2},\ \ldots\ ,\sqrt2)=[...,...,...]$, $\vec n(\ \ldots\ ,1-\frac{\sqrt3}{2},...)=[...,...,...]$, $\vec n(\ \ldots\ ,\frac32,...)=[...,...,...]$. Ogólnie: $\vec n_B(x,y,z)=[1-x,...,...]$.



3. Na pow. S czworościanu $OABC$ (p.rys) wektorami normalnymi (skierowanymi na zewnątrz) są: $[0,-1,0]$ dla p-tów ściany OAC, $[-1,0,0]$ dla ściany ... , $[...,...,...]$ dla ściany OAB. Dla ABC wektor normalny musi być prostopadły do leżących na ABC wektorów: $\vec{CA}=[2,0,-5]$, $\vec{CB}=[0,3,-5]$; łatwo zgadnąć, że wektor $\vec v=[\frac52,\frac53,1]$ jest do nich prostopadły (oblicz iloczyny skalarne $\vec v\circ\vec{CA}$, $\vec v\circ\vec{CB}$); zatem: $\vec n_{ABC}=\frac{1}{|\vec v|}\cdot\vec v=\frac{1}{\sqrt{(...)^2+(...)^2+1^2}}\cdot[\frac52,\frac53,1]$.

(Zamiast zgadywać można wiedzieć, że iloczyn **wektorowy** $\vec{CA}\times\vec{CB}$ jest prostopadły do nich i normując go [dzieląc przez długość] otrzymamy $\pm\vec n$. Dalej pokażemy ogólny sposób.)

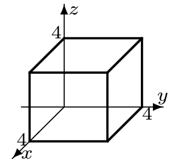
Niech na powierzchni S będzie zadana orientacja, tj. w każdym punkcie wybrany będzie wektor $\vec n=\vec n(x,y,z)$ normalny do S w tym punkcie i niech $\vec F=(P,Q,R)$ będzie polem wektorowym określonym na S. **Całka powierzchniowa zorientowana** $\iint\limits_S \vec F\circ d\vec S$ jest równa całce powierzchniowej niezorientowanej $\iint\limits_S(\vec F\circ\vec n)\,dS$.

Inna notacja całki powierzchn. zorientowanej to: $\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$.

Zatem całka pow. zorient. $\iint_S\vec F\circ d\vec S$ jest przybliżana przez sumy: $\sum_i(\vec F_i\circ\vec n_i)\cdot|S_i|$, gdzie $\vec F_i\circ\vec n_i$ oznacza długość rzutu prostopadłego wektora $\vec F_i$ na wektor $\vec n_i$ (oba zależą od wybranych punktów $(x_i,y_i,z_i)\in S_i$), a $|S_i|$ oznacza pole S_i z podziału pow. S.

Lapidarnie mówiąc całka zorientowana rozkłada pole $\vec F$ na sumę $\vec F_n+\vec F_S$ gdzie $\vec F_n\perp S$ a $\vec F_S$ 'leżą' na S oraz 'zlicza ze znakiem' długości F_n; mamy $\iint_S\vec F\circ d\vec S=\iint_S F_n\,dS$.

Gdy $\vec F$ oznacza (wektory) prędkości przepływu wody, to przez 'mały' kawałek S_i pow. S w jednostce czasu przepływa 'słup' wody o obj. $F_n\cdot|S_i|$, więc $\iint_S\vec F\circ d\vec S$ mierzy bilans przepływu wody przez S (w jednostce czasu i ze 'znakiem', tj. dodatnim jest przepływ na stronę powierzchni wskazywaną przez zwroty wektorów normalnych).



Dla pow. S sześcianu $[0,4]^3$ patrzymy na pary przeciwległych ścian:

$$\iint\limits_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iint\limits_{0\le y,z\le 4}P(4,y,z)-P(0,y,z)\,dS+$$
$$+\iint\limits_{0\le x,z\le 4}Q(x,4,z)-Q(x,0,z)dS+\iint\limits_{0\le x,y\le 4}R(x,y,4)-R(x,y,0)dS$$

np. $\iint\limits_S(x+2y)\,dydz+xz\,dzdx+x^2y\,dxdy=\iint\limits_{0\le y,z\le 4}4dS+\iint\limits_{0\le x,z\le 4}0dS+\iint\limits_{0\le x,y\le 4}0dS=64$

Jeśli powierzchnia S jest wykresem f-cji $z(x,y)\in C^1$ określonej na obszarze D, to dla punktu $A(x,y,z(x,y))$ tej pow. wektory $\left[1,0,\frac{\partial z}{\partial x}\right]$, $\left[0,1,\frac{\partial z}{\partial y}\right]$ wyznaczają pł. styczną. Zatem wektor $\left[\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right]$ jest prostopadły do S w p-kcie A (oblicz il. skalarne) i $\vec n=\frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}}\cdot\left[\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right]$ jest normalny (zadając orientację na S). Mamy:

$$\iint\limits_S\vec F\circ d\vec S=\iint\limits_S(\vec F\circ\vec n)\,dS=\iint\limits_S(P,Q,R)\circ\Big(\frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}}\cdot[\tfrac{\partial z}{\partial x},\tfrac{\partial z}{\partial y},-1]\Big)\,dS=$$
$$=\iint\limits_D(P\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-R)\frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,d\omega,\ \text{czyli:}$$

$$\boxed{\iint\limits_S\vec F\circ d\vec S=\iint\limits_D P\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-R\cdot d\omega}$$ (zamiana całki skierowanej na podwójną)

4. Półsfera $S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=2z, z\ge 1\}$ jest wykresem funkcji $z(x,y)=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ o dziedzinie $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$, więc np.:

$$\iint\limits_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\iint\limits_D x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+y\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-(1+\sqrt{1-x^2-y^2})=$$
$$=-\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1\overset{\text{wsp. bieg.}}{=}-\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}+r\,dr\,d\varphi=\ ......$$

5. Powierzchnia $S=\{(x,y,z): 0\le z=1-x^2-y^2\}$ jest wykresem funkcji $z(x,y)=1-x^2-y^2$ dla punktów koła $D:\ x^2+y^2\le 1$ i $\frac{\partial z}{\partial x}=-2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$, więc

$$\iint_S\ x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\iint_D\ -x\cdot(-2x)-y\cdot(-2y)+(1-x^2-y^2)=$$
$$=\iint_D 1+x^2+y^2=|D|+\iint_D x^2+y^2\overset{\text{wsp. bieg.}}{=}\pi+\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\varphi=\pi+2\pi\tfrac14=\tfrac32\pi.$$

UWAGA. Funkcja $z(x,y)$ 'zadaje orientację do góry' pow. S, więc jeśli oryginalna orientacja S jest przeciwna, to wynik jest przeciwny: $-\frac32\pi$.

6. Powierzchnia (boczna stożka) $\Omega:\ z^2=x^2+y^2,\ 0\le z\le 4$ jest wykresem funkcji $z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ dla punktów koła $D:\ x^2+y^2\le 4^2$, zatem

$$\iint_\Omega\ (y-z)\,dydz+(z-x)\,dzdx+(x-y)\,dxdy=$$
$$=\iint_D\ -(y-\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-(\sqrt{x^2+y^2}-x)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x-y)\,d\omega=$$
$$=\iint_D\ 2(x-y)\,d\omega=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^4 2(r\cos\varphi-r\sin\varphi)\cdot r\ dr\,d\varphi=2[\sin\varphi+\cos\varphi]_0^{2\pi}\cdot[\tfrac13r^3]_0^4=0.$$