

### ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI POWIERZCHOWNE C.D.

**TWIERDZENIE.** (Gaussa–Ostrogradzkiego) Niech  $S$  będzie powierzchnią **zamkniętą**, kawałkami gładką, ograniczającą obszar  $V$  i zorientowaną na zewnątrz i niech pole wektorowe  $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$  określone na  $S \cup V$  będzie  $C^1$  gładkie. Wtedy

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \circ d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, d\omega .}$$

W innej notacji:  $\iint_S P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dxdy = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \, d\omega .$

**0.** Obliczmy  $\iint_S 2x \, dydz + xy \, dzdx + xz \, dxdy$ , gdzie  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2y\}$ .

$S$  jest sferą ograniczającą kulę  $K$  o środku w  $(0, 1, 0)$  i promieniu 1.

Na  $S$  przyjmujemy orientację na zewnątrz kuli:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \circ d\vec{S} = \{\text{tw. Gaussa}\} &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, d\omega = \iiint_K \frac{\partial 2x}{\partial x} + \frac{\partial xy}{\partial y} + \frac{\partial xz}{\partial z} \, d\omega = \iiint_K 2 + x + x \, d\omega = \\ &= (\iiint_K 2 \, d\omega) + 2 \iiint_K x \, d\omega = 2|K| + 2 \iiint_K x \, d\omega = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 + 0 = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

( $\iiint_K x \, d\omega = 0$  bo  $x = 0$  jest płaszczyzną symetrii kuli  $K$ ).  $\square$

**1.** Dla brzegu  $S$  kuli  $V = \{(x, y, z) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2\}$  zorientowanego na zewnątrz, stosując tw. Gaussa (i trik dodania i odjęcia  $a + b + c$ ) mamy:

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2, y^2, z^2) \circ d\vec{S} &= \iiint_V 2x + 2y + 2z = 2 \iiint_V (x-a) + (y-b) + (z-c) + (a+b+c) = \\ &\text{ponieważ: } \iiint_V (x-a) = 0, \iiint_V (y-b) = 0, \iiint_V (z-c) = 0 \text{ (z symetrii), więc} \\ &= 2 \iiint_V (x-a) + (y-b) + (z-c) + 2 \iiint_V a + b + c = 2 \cdot 0 + 2(a+b+c) \cdot |V| = 2(a+b+c)|V|. \end{aligned}$$

Można ten rezultat uogólnić, np. dla elipsoid:  $S : \frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} + \frac{(z-c)^2}{C^2} = 1$  lub dla pow. prostopadłościanów  $V = [a-a', a+a'] \times [b-b', b+b'] \times [c-c', c+c']$ ; a także dla pola  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + yz^5, y^2 - 3x \sin z, z^2 + e^{\sin x} y^9)$  (dlaczego?).  $\square$

**2.** Dla brzegu  $S$  kuli  $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2\}$  zorientowanego na zewnątrz, stosując tw. Gaussa (i zamianę na współrzędne sferyczne) dostajemy:

$$\iint_S (x^3, y^3, z^3) \circ d\vec{S} = \iiint_V 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^5 3r^2 \cdot r^2 \sin \varphi \, dr d\varphi d\theta = 3 \cdot 5^4 \cdot 4\pi.$$

**3.** Powierzchnia  $S = \{(x, y, z) : 0 \leq z = 1 - x^2 - y^2\}$  zorientowana 'do góry' nie jest zamknięta, ale po 'domknięciu' jej kołem  $K = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , z wektorem normalnym  $[0, 0, -1]$ , ogranicza obszar  $V$ , więc dla  $\vec{F} = (2xy - \sin z, x - y^2, z)$  mamy

$$\iint_{S \cup K} \vec{F} \circ d\vec{S} = \iiint_V \frac{\partial(2xy - \sin z)}{\partial x} + \frac{\partial(x - y^2)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = \iiint_V 2y - 2y + 1 = |V| = \dots = \frac{\pi}{2} .$$

Ponieważ  $\iint_K \vec{F} \circ d\vec{S} = \iint_K (2xy - \sin z, x - y^2, z) \circ (0, 0, -1) dS = \iint_K -z dS = \iint_K 0 dS = 0$

więc  $\iint_S \vec{F} \circ d\vec{S} = \iint_{S \cup K} \vec{F} \circ d\vec{S} - \iint_K \vec{F} \circ d\vec{S} = |V| - 0 = |V| = \dots = \frac{\pi}{2}$   $\square$

**TWIERDZENIE.** (Stokes'a) Niech  $S$  będzie powierzchnią (kawałkami gładką) o brzegu  $\Gamma$  (kawałkami gładkim) i niech orientacja na  $\Gamma$  będzie zgodna z orientacją  $S$ . Niech pole wektorowe  $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$  określone na  $S \cup \Gamma$  będzie  $C^1$  gładkie. Wtedy

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \circ d\vec{S} .}$$

W innej notacji:

$$\int_\Gamma P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \, dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \, dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dxdy .$$

**PRZYKŁAD.** Dla okręgu  $\Gamma = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 4\}$  z orientacją 'przeciwwzgarową' (patrzac z dodatniej półosi  $OZ$ ) i pola  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xy, -2xz)$ , całkę krzywoliniową zorientowaną  $J = \int_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_\Gamma y^2 \, dx + xy \, dy - 2xz \, dz$  obliczymy na 3 sposoby:

— korzystamy z parametryzacji  $\Gamma : x(t) = 2 \cos t, y(t) = 2 \sin t, z(t) = 0, 0 \leq t \leq 2\pi$ :  
 $J = \int_0^{2\pi} y^2 \cdot x' + xy \cdot y' - 2xz \cdot z' \, dt = \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 t \cdot (-2 \sin t) + 4 \cos t \sin t \cdot 2 \cos t - 0 \, dt =$   
 $= -8 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^3 t \, dt - \frac{8}{3} \cdot \int_0^{2\pi} 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) \, dt = -8 \cdot 0 - \frac{8}{3} \cdot [\cos^3 t]_0^{2\pi} \, dt = 0,$

— korzystamy z tw. Stokes'a:  $\Gamma$  jest brzegiem półsfery  $S : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  z orientacją 'do góry', obliczamy  $\operatorname{rot} \vec{F} = (0, 2z, -y)$  (zamieniamy dalej na całkę podwójną):

$$J = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \circ d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} -0 \cdot \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - 2\sqrt{4-x^2-y^2} \cdot \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - y = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} y = 0,$$

— korzystamy z tw. Stokes'a:  $\Gamma$  jest brzegiem koła  $S' = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 4\}$  z orientacją  $[0, 0, 1]$ , obliczamy  $\operatorname{rot} \vec{F} = (0, 2z, -y)$  i z def. całki pow. zorient. mamy:

$$J = \iint_{S'} \operatorname{rot} \vec{F} \circ d\vec{S} = \iint_{S'} (0, 2z, -y) \circ (0, 0, 1) \, dS = \iint_{S'} -y \, dS = \{\text{z symetrii}\} = 0.$$

Ponadto: dla dowolnej powierzchni  $S''$  o brzegu  $\Gamma$  jest  $\iint_{S''} 0 \, dydz + 2z \, dzdx - y \, dxdy = 0$ , co wynika też z tw. Gaussa-Ostrogradzkiego (jak?).

**PRZYKŁAD.** Stosując tw. Stokes'a dla łamanej  $ABCA$ , gdzie  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  i  $\vec{F} = (yx, x^3y, 2z)$  mamy  $\operatorname{rot} \vec{F} = (0, 0, 3x^2y - x)$  i

$$J = \int_{ABCA} yx \, dx + x^3y \, dy + 2z \, dz = \iint_{ABC} (0, 0, 3x^2y - x) \circ (1, 1, 1) \frac{1}{\sqrt{3}} \, dS.$$

Inaczej: łamana ta jest brzegiem pow.  $S = ABO \cup BCO \cup AOC$  więc (też z Stokes'a)

$$\begin{aligned} J &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \circ d\vec{S} = \iint_{ABO} \operatorname{rot} \vec{F} \circ (0, 0, 1) \, dS + \iint_{BCO} \operatorname{rot} \vec{F} \circ (1, 0, 0) \, dS + \iint_{AOC} \operatorname{rot} \vec{F} \circ (0, 1, 0) \, dS = \\ &= \iint_{ABO} 3x^2y - x \, dS + 0 + 0 = \int_0^1 \int_0^{1-x} 3x^2y - x \, dydx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2(1-x)^2 - x(1-x) \, dx = \frac{-7}{60}. \end{aligned}$$

**PRZYKŁAD.** Jeśli dla pow.  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^6 = 1, z \geq 0\}$  zorientowanej 'ku górze', mamy obliczyć  $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \circ d\vec{S}$ , gdzie  $\vec{F} = ((z+1)y^3, -(z+1)xy, e^{x^2y^2})$ , to zauważmy, że brzeg  $S$  jest okręgiem  $\Gamma : x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = 0, 0 \leq t \leq 2\pi$ :

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \circ d\vec{S} = \int_\Gamma \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (z+1)y^3 \cdot x' - (z+1)xy \cdot y' + e^{x^2y^2} \cdot 0 \, dt = \dots = -\frac{3}{4}\pi .$$

